

Томилин А.В., Ляпин Д.Г., Баранова М.А.

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ УПРУГИХ МОДУЛЕЙ ГЕОМАТЕРИАЛОВ С СИЛЬНО КОРРЕЛИРОВАННЫМИ ОРИЕНТАЦИЯМИ СТРУКТУРНЫХ И ТЕКСТУРНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ В ПРОСТРАНСТВЕ В ПОДЗЕМНОМ СТРОИТЕЛЬСТВЕ

Описана важность получения точных значений физических свойств горных пород, слагающих горный массив на этапе проектирования подземных сооружений, как наиболее сильно влияющих на устойчивость будущего подземного сооружения и природно-технической геосистемы и напрямую отражающихся на технико-экономическом обосновании будущего проекта. На основе разработанных математических моделей геоматериалов с сильно коррелированными ориентациями структурных и текстурных составляющих в пространстве был создан комплекс программ, позволяющий получить численные значения эффективных упругих модулей и упругого поля напряжений в геоматериалах в зависимости от ориентации структурных и текстурных составляющих в пространстве. Приведены графики основанные на результатах компьютерного и численного моделирования.

Ключевые слова: математическое моделирование, подземное сооружение, поле напряжений, природно-техническая геосистема, горная порода, мегаполис, структура, текстура, комплекс программ.

На этапе проектирования подземных сооружений расположенных в мегаполисах важно применять системный подход с целью максимального использования подземного

пространства с одной стороны и сохранением уже имеющейся городской застройки с другой. Строители должны учитывать сложные горно-геологические условия в месте будущего сооружения, от которых зависит выбор способа строительства будущего сооружения, а также его надежность, и, что наиболее важно, формирование технико-экономического обоснования [1, 2, 5] проекта.

Чем более точными данными о породном массиве будут обладать проектировщики будущего подземного сооружения, тем более точное и обоснованное технико-экономическое обоснование они получают для будущего проекта. Одним из важнейших показателей породного массива являются его физические свойства, отражающие надежность породного массива, а также дающие представление о будущей устойчивости природно-технической геосистемы.

Наличие в породном массиве полнокристаллических минералов с сильно коррелированными структурными составляющими в пространстве изменяет физические свойства такого породного массива, поэтому важно получить точные значения тензоров упругих модулей пород, входящих в данный породный массив [3, 4].

Для породных массивов, состоящих из полнокристаллических минералов с сильно коррелированными структурными составляющими в пространстве были разработаны математические модели, позволяющие получать тензоры эффективных упругих податливостей и эффективных упругих модулей:

$$S_{ijkl}^{\varepsilon} = \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (I_{ijmn} + A_{ijpq} C_{pqmn}^1)^{-1} f(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi \right] \times \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} C_{ijkl} (I_{mnij} + A_{mnpq} C_{pqij}^1)^{-1} f(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi \right]^{-1}. \quad (1)$$

$$C_{ijkl}^{\varepsilon} = \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} C_{mnr} (I_{ijmn} + A_{ijpq} C_{pqmn}^1)^{-1} f(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi \right] \times \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (I_{ijmn} + A_{ijpq} C_{pqmn}^1)^{-1} f(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi \right]^{-1}, \quad (2)$$

где $i, j, m, n, r, t, p, q, k, l = 1, 2, 3$.

Для породных массивов с сильно коррелированными структурными составляющими в пространстве была разработана

математическая модель, позволяющая получить поле напряжений:

$$\sigma_{ij} = \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} C_{mnr} \left(I_{ijmn} + A_{ijpq} C_{pqmn}^1 \right)^{-1} f(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi \right] \times \\ \times \left(I_{ijmn} + A_{ijpq} C_{pqmn}^1 \right)^{-1} \times \\ \times \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left(I_{ijmn} + A_{ijpq} C_{pqmn}^1 \right)^{-1} f(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi \right]^{-1} \times \\ \times \left[I + \frac{1}{n} \int K(R) F(R) dV \right]^{-1} \varepsilon_{ij}^0 \quad (3)$$

Разработанные математические модели были апробированы для силвинита и галита со свободно ориентированными в пространстве структурными и текстурными составляющими. Свободная ориентация структурных составляющих в пространстве делает горную породу изотропной, вследствие чего эффективные упругие модули перестают зависеть от функции распределения углов Эйлера. Данное обстоятельство делает эффективные упругие модули симметричными по первым двум и последним индексам и симметричными тензоры напряжений и деформаций, и, следовательно, для простоты можно тензорные обозначения заменить матричными, как показано в таблице.

При этом вводятся множители по следующим правилам:

$$S_{ijkl}^a = S_{pq}^a, \text{ если } p \text{ и } q \text{ равны } 1, 2 \text{ или } 3;$$

$$S_{ijkl}^a = \frac{1}{2} S_{pq}^a, \text{ если } p \text{ или } q \text{ равны } 4, 5 \text{ или } 6;$$

$$S_{ijkl}^a = \frac{1}{4} S_{pq}^a, \text{ если } p \text{ и } q \text{ равны } 4, 5 \text{ или } 6.$$

Соответствия между матричными и тензорными коэффициентами

Матричное обозначение	Тензорное обозначение
1	11
2	22
3	33
4	23, 32
5	12, 31
6	12, 21

Используя матричные обозначения, общие выражения для подсчета эффективных констант (1), (2), записанные в компонентной форме, переписываются следующим образом:

$$S_{ij}^{\alpha} = \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (I_{ik} + A_{im} C_{mk}^1)^{-1} f(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi \right] \times \\ \times \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} C_{mj} (I_{km} + A_{kp} C_{pm}^1)^{-1} f(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi \right]^{-1}, \quad (4)$$

$$C_{ij}^{\alpha} = \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} C_{mm} (I_{im} + A_{ip} C_{pm}^1)^{-1} f(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi \right] \times \\ \times \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (I_{nj} + A_{np} C_{pj}^1)^{-1} f(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi \right]^{-1}, \quad (5)$$

где $i, j, k, m, n, p = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Беря во внимание симметричность тензоров упругих модулей и упругого поля напряжений, выражение (3) можно записать в следующем виде:

$$\sigma_i = C_{mk} (I_{im} + A_{iq} C_{qm}^1)^{-1} \sigma_j^0 \times \\ \times \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} C_{mk} (I_{jm} + A_{jp} C_{pm}^1)^{-1} f(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi \right]^{-1}, \quad (6)$$

где $i, j, k, m, n, p = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Таким образом, выражения (4) и (5) в матричном обозначении можно использовать для подсчета эффективных упругих модулей, а выражение (6) для расчета упругого поля напряжений горных пород со свободно ориентированными структурными составляющими в пространстве.

Для численной проверки разработанных моделей была создан комплекс программ, позволяющий получить эффективные упругие модули и упругое поле напряжений горных пород в зависимости от ориентации структурных составляющих в пространстве с шагом $\pi/6$ для каждого из трех углов Эйлера.

Изложим последовательность операций необходимых для численного нахождения эффективных упругих модулей на компьютере.

1. Формирование тензора модулей упругости $C_{ijkl}(\varphi, \theta, \psi)$ по известным значениям того же тензора при $\varphi, \theta, \psi = 0$.

$$C_{ijkl}(\varphi, \theta, \psi) = a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lr} C_{mnp} (0, 0, 0),$$

где $a_{11} = \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi$;

$$a_{12} = -\sin \varphi \cos \psi - \cos \theta \cos \varphi \sin \psi ;$$

$$a_{13} = \sin \psi \sin \theta ;$$

$$a_{21} = \cos \varphi \sin \psi - \cos \theta \sin \varphi \cos \psi ;$$

$$a_{22} = -\sin \varphi \sin \psi - \cos \theta \cos \varphi \cos \psi ;$$

$$a_{23} = -\cos \psi \sin \theta ;$$

$$a_{31} = \sin \varphi \sin \theta ;$$

$$a_{32} = \cos \varphi \sin \theta ;$$

$$a_{33} = \cos \theta .$$

2. Если ориентация структурных и текстурных составляющих в пространстве свободная, т.е. тензор $C_{ijkl}(\varphi, \theta, \psi)$ симметричен, то можно сформировать матрицу $C_{mj}(\varphi, \theta, \psi)$, соответствующую ему.

3. Формирование средней величины $\langle C_{ijkl}(\varphi, \theta, \psi) \rangle$:

$$\langle C_{ijkl}(\varphi, \theta, \psi) \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} C_{ijkl}(\varphi, \theta, \psi) f(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi ,$$

где $f(\varphi, \theta, \psi)$ – функция распределения зерен по ориентациям, если отсутствует преимущественная ориентация $f(\varphi, \theta, \psi) = 1/8\pi^2$.

Основываясь на данной последовательности шагов, была создана блок-схема, изображенная на рисунке (рис. 1).

Для численного нахождения упругого поля напряжений на компьютере применялась следующая последовательность действий:

1. Формирование тензора модулей упругости $C_{ijkl}(\varphi, \theta, \psi)$ по известным значениям того же тензора при $\varphi, \theta, \psi = 0$.

$$C_{ijkl}(\varphi, \theta, \psi) = a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lr} C_{mnp} (0, 0, 0),$$

где $a_{11} = \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi$;

$$a_{12} = -\sin \varphi \cos \psi - \cos \theta \cos \varphi \sin \psi ;$$

$$a_{13} = \sin \psi \sin \theta ;$$

$$a_{21} = \cos \varphi \sin \psi - \cos \theta \sin \varphi \cos \psi ;$$

$$a_{22} = -\sin \varphi \sin \psi - \cos \theta \cos \varphi \cos \psi ;$$

$$a_{23} = -\cos \psi \sin \theta ;$$

$$a_{31} = \sin \varphi \sin \theta ;$$

$$a_{32} = \cos \varphi \sin \theta ;$$

$$a_{11} = \cos \theta .$$

2. Если ориентация структурных и текстурных составляющих в пространстве свободная, т.е. тензор $C_{ijkl}(\varphi, \theta, \psi)$ симметричен, то можно сформировать матрицу $C_{mj}(\varphi, \theta, \psi)$, соответствующую ему.

3. Формирование средней величины $\langle C_{ijkl}(\varphi, \theta, \psi) \rangle$:

$$\langle C_{ijkl}(\varphi, \theta, \psi) \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} C_{ijkl}(\varphi, \theta, \psi) f(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi ,$$

где $f(\varphi, \theta, \psi)$ – функция распределения зерен по ориентациям.

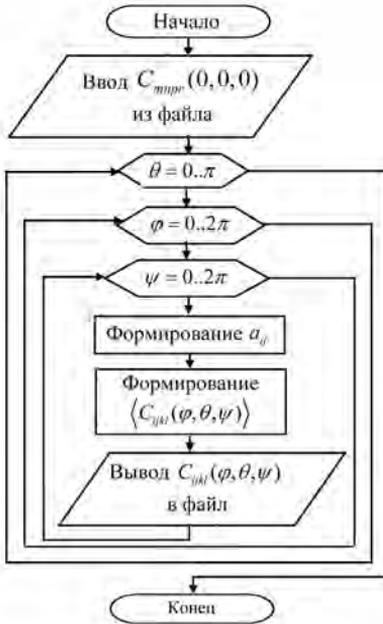


Рис. 1. Блок-схема комплекса программ по нахождению эффективных упругих модулей горных пород с сильно коррелированными ориентациями структурными составляющими в пространстве

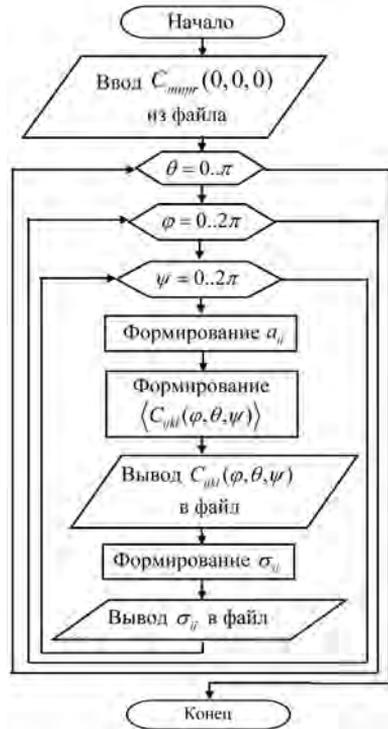


Рис. 2. Блок-схема комплекса программ по нахождению упругого поля напряжений горных пород с сильно коррелированными ориентациями структурными составляющими в пространстве

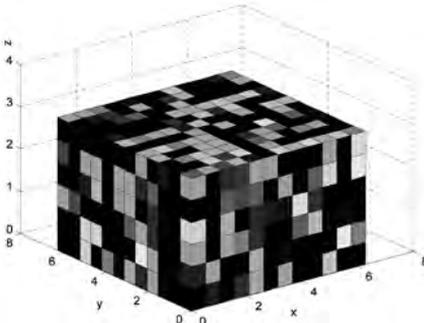


Рис. 3. Функция распределения значений эффективного модуля упругости от углов Эйлера

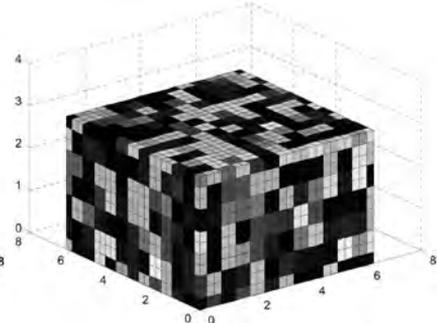


Рис. 4. Интерполяция по соседним элементам

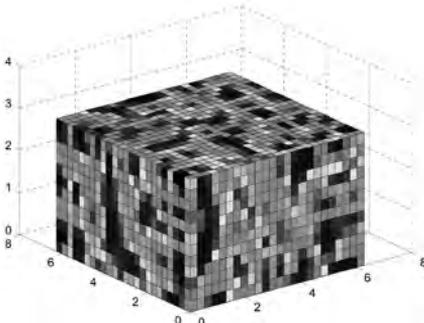


Рис. 5. Интерполяция кубическими сплайнами

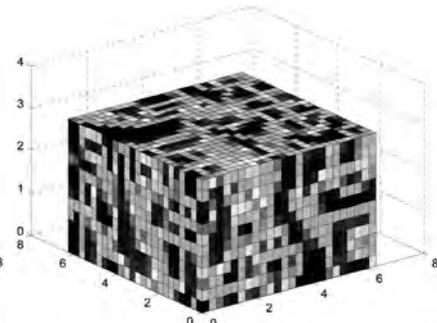


Рис. 6. Интерполяция бикубическими сплайнами

4. Вычисление упругого поля напряжений:

$$\sigma_{ij} = C_{mnrt} \left(I_{ijmn} + A_{ijpq} C_{pqmn}^1 \right)^{-1} \sigma_{kl}^0 \times \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} C_{rtkl} \left(I_{rtkl} + A_{rtpk} C_{pqkl}^1 \right)^{-1} f(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi \right]^{-1}.$$

Основываясь на изложенном алгоритме, была создана блок-схема, изображенная на рис. 2.

На основе данных, которые были получены после работы разработанной программы для галита, был построен график значения эффективного упругого модуля $C_{ijkl}(\varphi, \theta, \psi)$, была построена функция распределения в математическом программном комплексе MatLab v.7, представленная на рис. 3.

Для увеличения точности измерений была проведена интерполяция данных в 3-х видах, представленных на рис. 4–6.

Таким образом, в результате проведенных исследований были проверены математические модели нахождения эффективных упругих модулей и упругого поля напряжений в горных породах с сильно коррелированными ориентациями структурных и текстурных составляющих в пространстве. Использование описанных выше моделей даст возможность получать количественные значения физических свойств горных пород, слагающих породный массив, которые влияют на его устойчивость и устойчивость природно-технической геосистемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Корчак А. В.* Методологические принципы освоения подземного пространства мегаполисов // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2009. – № 9. – С. 51–62.
2. *Картозия Б. А., Корчак А. В., Левченко А. Н.* Проблемы методологии и практики освоения подземного пространства мегаполисов // Горный журнал. – 2014. – № 9. – С. 60–64.
3. *Томилин А. В.* Математические модели сплошной среды и эллипсоидальной неоднородности в упругой среде с сильно коррелированными в пространстве ориентациями структурных и текстурных составляющих // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2010. – № 4. – С. 324.
4. *Томилин А. В.* Математическое моделирование горных пород с сильно коррелированными ориентациями структурных и текстурных составляющих в пространстве // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2010. – № 4. – С. 404.
5. *Шубик Е. И., Томилин А. В., Мельникова С. А., Корчак А. В.* Выбор критериев для оценки эффективности строительства подземных сооружений в сложных горно-геологических условиях г. Москвы // Научный вестник МГГУ (электронный журнал). – 2012. – № 8 (29). – С. 68–74. **ГИАБ**

КОРОТКО ОБ АВТОРАХ

*Томилин Александр Владимирович*¹ – кандидат технических наук, доцент, e-mail: avtomilin@mail.ru,

*Ляпин Дмитрий Геннадьевич*¹ – аспирант,

*Баранова Мария Александровна*¹ – заместитель директора Центра довузовской подготовки и организации приема,

¹ НИТУ «МИСиС».

UDC 622.012:
658.2.016;
622.25

Tomilin A.V., Lyapin D.G., Baranova M.A.

**THE USE OF COMPUTER MODELING
FOR EFFECTIVE ELASTIC MODULI
GEOMATERIALS STRONGLY CORRELATED
WITH THE ORIENTATION
OF THE STRUCTURAL AND TEXTURAL
COMPONENTS IN THE SPACE
IN THE UNDERGROUND CONSTRUCTION**

The article describes the importance of obtaining accurate values of physical properties of rocks, forming the mountain range at the design stage of underground facilities as the most strongly affecting the stability of the future underground construction and natural-technical geosystems and directly affecting the feasibility of the future project.

The presence in the rock mass polycrystalline rocks with strongly correlated orientations structural and textural components affects the properties of the entire rock mass. The use of the apparatus of mathematical and numerical modeling allows obtaining reliable values of the effective elastic moduli and elastic stress field in geomaterials with strongly correlated orientations of the structural and textural components in space. In the article, the mathematical and software verification established mathematical models.

On the basis of the developed mathematical models of geological materials with strongly correlated orientations of the structural and textural components in the space of a set of programs that allows you to get the numerical values of the effective elastic moduli and elastic stress field in geomaterials depending on the orientation of the structural and textural components in space has been created.

In addition, the article shows graphs based on the results of computer simulations and numerical.

Key words: mathematical modeling, underground construction, the stress field, natural and technical geosystem, rock, megapolis, structure, texture, complex programs.

AUTHORS

*Tomilin A.V.*¹, Candidate of Technical Sciences, Assistant Professor,
e-mail: avtomilin@mail.ru,

*Liapin D.G.*¹, Graduate Student,

*Baranov M.A.*¹, Deputy Director of the Center of Pre-University
Preparation and Organization of the Reception,

¹ National University of Science and Technology «MISIS»,
119049, Moscow, Russia.

REFERENCES

1. Korchak A. V. *Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten'*. 2009, no 9, pp. 51–62.
2. Kartoziya B.A., Korchak A.V., Levchenko A.N. *Gornyy zhurnal*. 2014, no 9, pp. 60–64.
3. Tomilin A. V. *Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten'*. 2010, no 4, pp. 324.
4. Tomilin A. V. *Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten'*. 2010, no 4. C. 404.
5. Shubik E. I., Tomilin A. V., Mel'nikova S. A., Korchak A. V. *Nauchnyy vestnik MGGU (elektronnyy zhurnal)*. 2012, no 8 (29), pp. 68–74.