

УДК 539.375

Н.И. Александрова

АЛЕКСАНДРОВА НАДЕЖДА ИВАНОВНА – кандидат физико-математических наук (Институт горного дела им. Н.А. Чинакала СО РАН, Новосибирск). E-mail: alex@math.nsc.ru

Плоская задача Лэмба для блочной среды с учетом вязкости

Исследуется плоская задача Лэмба о действии сосредоточенной нагрузки на поверхность блочного полупространства с учетом вязкости. Блочная среда моделируется однородной двумерной решеткой, состоящей из масс, соединенных пружинами и демпферами в направлениях осей x , y и в диагональных направлениях. Задача рассматривается в плоской постановке. Методом конечных разностей по явной схеме проведено численное исследование влияния вязкости на динамическое поведение двумерной модели блочной среды при сосредоточенном воздействии вертикальной нагрузки на полупространство. Аналитически получено решение задачи без учета вязкости.

Ключевые слова: блочная среда, сейсмическая волна, задача Лэмба, вязкие прослойки.

Введение

Исследования последних лет, касающиеся распространения сейсмических волн в породных массивах, свидетельствуют о необходимости учета в математических моделях, предназначенных для геомеханики и сейсмоки, блочного строения горных пород. На развитие этих разработок большое влияние оказала фундаментальная концепция блочно-иерархического строения объектов геосреды М.А. Садовского [4]. Расчеты волнового движения в цепочке упругих стержней, разделенных податливыми прослойками, показали, что низкочастотное возмущение, возникающее при импульсном воздействии, достаточно хорошо описывается в модели «жесткие блоки – вязкоупругие прослойки». Такой подход был использован в работах [5, 6] для описания динамического поведения двумерной блочной среды, в которой жесткие блоки предполагались прямоугольной формы. Более упрощенную модель блочной среды можно получить, если считать блоки сосредоточенными массами, соединенными пружинами и демпферами [1, 2].

Двумерная вязкоупругая модель распространения волн в блочных средах

В настоящей работе исследуется задача Лэмба о действии сосредоточенной нагрузки на поверхность блочного полупространства (рис. 1). Блочная среда моделируется однородной двумерной решеткой, состоящей из масс, соединенных пружинами и демпферами в направлениях осей x , y и в диагональных направлениях (рис. 2). Задача рассматривается в плоской постановке. Принятая модель совпадает с используемой в [9].

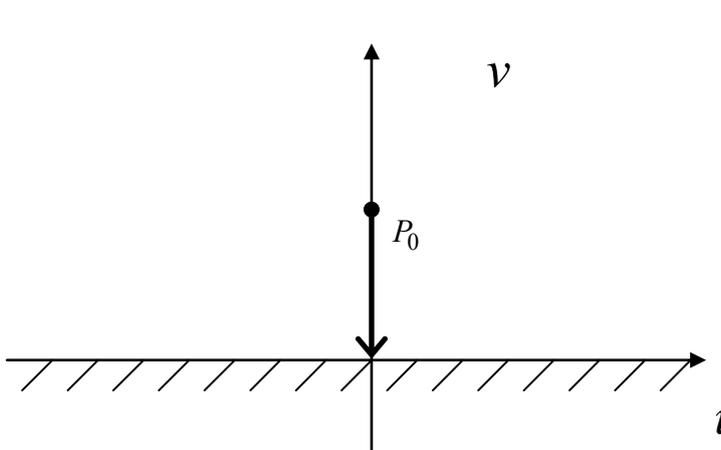


Рис. 1

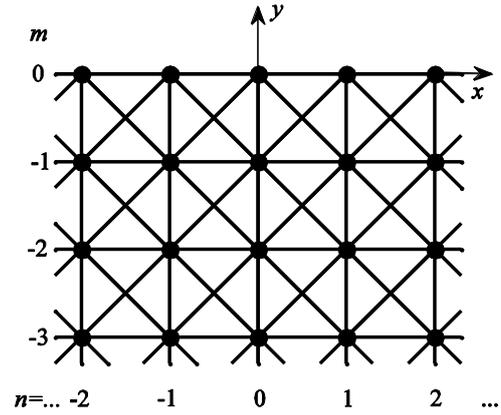


Рис. 2

Уравнения движения блоков с номерами n, m , находящихся вне поверхности полупространства, имеют вид:

$$\begin{aligned}
 M\ddot{u}_{n,m} &= k_1(u_{n+1,m} - 2u_{n,m} + u_{n-1,m}) + \lambda_1(\dot{u}_{n+1,m} - 2\dot{u}_{n,m} + \dot{u}_{n-1,m}) + \\
 &+ k_2(u_{n+1,m+1} + u_{n-1,m-1} + u_{n+1,m-1} + u_{n-1,m+1} - 4u_{n,m})/2 + \\
 &+ \lambda_2(\dot{u}_{n+1,m+1} + \dot{u}_{n-1,m-1} + \dot{u}_{n+1,m-1} + \dot{u}_{n-1,m+1} - 4\dot{u}_{n,m})/2 + \\
 &+ k_2(v_{n+1,m+1} + v_{n-1,m-1} - v_{n-1,m+1} - v_{n+1,m-1})/2 + \\
 &+ \lambda_2(\dot{v}_{n+1,m+1} + \dot{v}_{n-1,m-1} - \dot{v}_{n-1,m+1} - \dot{v}_{n+1,m-1})/2, \\
 M\ddot{v}_{n,m} &= k_1(v_{n,m+1} - 2v_{n,m} + v_{n,m-1}) + \lambda_1(\dot{v}_{n,m+1} - 2\dot{v}_{n,m} + \dot{v}_{n,m-1}) + \\
 &+ k_2(u_{n+1,m+1} + u_{n-1,m-1} - u_{n+1,m-1} - u_{n-1,m+1})/2 + \\
 &+ \lambda_2(\dot{u}_{n+1,m+1} + \dot{u}_{n-1,m-1} - \dot{u}_{n+1,m-1} - \dot{u}_{n-1,m+1})/2 + \\
 &+ k_2(v_{n+1,m+1} + v_{n-1,m-1} + v_{n-1,m+1} + v_{n+1,m-1} - 4v_{n,m})/2 + \\
 &+ \lambda_2(\dot{v}_{n+1,m+1} + \dot{v}_{n-1,m-1} + \dot{v}_{n-1,m+1} + \dot{v}_{n+1,m-1} - 4\dot{v}_{n,m})/2.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь u, v – перемещения в направлениях x, y ; n, m – номера масс в направлениях x, y ; M – масса; k_1, k_2 – жесткости пружин и λ_1, λ_2 – вязкости демпферов в осевых и диагональных направлениях.

В соответствии с рис. 1, 2 имеем: u – горизонтальные, v – вертикальные перемещения.

Уравнения движения блоков на границе ($m = 0$) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 M\ddot{u}_{n,0} &= k_1(u_{n+1,0} - 2u_{n,0} + u_{n-1,0}) + \lambda_1(\dot{u}_{n+1,0} - 2\dot{u}_{n,0} + \dot{u}_{n-1,0}) + k_2(u_{n-1,-1} + u_{n+1,-1} - 2u_{n,0})/2 + \\
 &+ \lambda_2(\dot{u}_{n-1,-1} + \dot{u}_{n+1,-1} - 2\dot{u}_{n,0})/2 + k_2(v_{n-1,-1} - v_{n+1,-1})/2 + \lambda_2(\dot{v}_{n-1,-1} - \dot{v}_{n+1,-1})/2, \\
 M\ddot{v}_{n,0} &= k_1(v_{n,-1} - v_{n,0}) + \lambda_1(\dot{v}_{n,-1} - \dot{v}_{n,0}) + k_2(u_{n-1,-1} - u_{n+1,-1})/2 + \lambda_2(\dot{u}_{n-1,-1} - \dot{u}_{n+1,-1})/2 + \\
 &+ k_2(v_{n-1,-1} - 2v_{n,0} + v_{n+1,-1})/2 + \lambda_2(\dot{v}_{n-1,-1} - 2\dot{v}_{n,0} + \dot{v}_{n+1,-1})/2 + P_0\delta_{0,n}H(t).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $H(t)$ – функция Хевисайда, δ_{0n} – символ Кронекера, P_0 – амплитуда нагрузки.

Полагаем, что начальные условия нулевые:

$$u_{n,m} = \dot{u}_{n,m} = v_{n,m} = \dot{v}_{n,m} = 0. \tag{3}$$

При переходе к сплошной среде уравнениям (1) соответствуют уравнения ортотропной теории упругости, которые при $k_1 = 2k_2$ описывают динамику изотропной упругой среды в условиях плоского напряженного состояния с коэффициентом Пуассона $\sigma = 1/3$, что соответствует $\lambda = 2\mu$.

В дальнейшем полагаем, что решетка изотропная – $k_1 = 2k_2$ и $\lambda_1 = 2\lambda_2$. Массу блоков и длину пружин примем за единицы: $M = 1, l = 1$. Пусть $k_1 = 3/4$. Значение k_1 выбиралось так, чтобы продольная скорость волн в решетке была равна скорости продольных волн в изотропной упругой среде в случае плоского напряженного состояния: $(k_1 + k_2)l^2 / M = E / \rho(1 - \sigma^2)$ при $E / \rho = 1$ и $\sigma = 1/3$, отсюда следует: $k_1 = 3/4$.

Скорости продольных и сдвиговых бесконечно длинных волн в блочной среде вычисляются по формулам [2]:

$$c_p = l \sqrt{\frac{3k_1}{2M}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}, \quad c_s = l \sqrt{\frac{k_1}{2M}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}. \quad (4)$$

Аналитическое решение

Для того чтобы построить аналитическое решение задачи Лэмба для блочной среды, применим преобразование Лапласа по времени t с параметром p (значок L) и дискретное преобразование Фурье по переменной n с параметром q (значок F). Используя стандартный подход для получения решения задачи Лэмба для упругой среды и опуская промежуточные выкладки, получим решение в изображениях задачи Лэмба для блочной среды без учета вязкости ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$) на поверхности полупространства:

$$u_0^{LF} = \frac{P_0 \sin(ql) [-(4 + \tilde{M})GH + F(\tilde{M} + 4A)J]}{p\Delta k_1},$$

$$v_0^{LF} = \frac{2iP_0 [(\tilde{M} + 4A)\{-JAF + (H + F)G(1 - A)\} - (4 + \tilde{M})GAF]}{p\Delta k_1},$$

$$\Delta = i[(H + F)\{G\tilde{M}^2 + J(\tilde{M} + 4A)^2 - AG\tilde{M}(2\tilde{M} + 4A) - AJ(\tilde{M} + 4A)(2\tilde{M} + 4A)\} - 4AH\{(\tilde{M} + 4A)J + G(\tilde{M} + 4)\}],$$

$$H = \sqrt{\tilde{M} + 2A}, \quad F = \sqrt{\tilde{M} + 2 + 2A}, \quad J = \sqrt{\tilde{M} + 6 - 2A}, \quad G = \sqrt{\tilde{M} + 6A},$$

$$A = \sin^2(ql/2), \quad \tilde{M} = Mp^2/k_1.$$

Дисперсионное уравнение $\Delta = 0$ является уравнением Релея для блочной среды. Из этого уравнения получаем, что скорость бесконечно длинных волн Рэлея в блочной среде [8] совпадает со скоростью волн Рэлея в изотропной упругой среде ($\sigma = 1/3$):

$$c_R = \sqrt{\frac{E(3 - \sqrt{3})}{4\rho}} = l \sqrt{\frac{k_1}{M} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\sqrt{3 - \sqrt{3}}}{2} \approx 0.563... \quad (5)$$

Полагая $p = i\omega$ в дисперсионном уравнении, определим резонансную частоту коротковолновых возмущений ($ql = \pi$) в релеевской волне:

$$\omega_1 = \omega(\pi) = \sqrt{\frac{4k_1}{3M}}.$$

Применяя асимптотические методы обращения преобразований Лапласа и Фурье, получим аналитическое решение данной задачи:

$$u_{n,0}(t) \approx \frac{P_0}{4k_1} \left[\frac{1}{3} - \int_0^\kappa \text{Ai}(y) dy \right], \quad \dot{u}_{n,0}(t) \approx \frac{nP_0}{2k_1 t} \frac{\text{Ai}(\kappa)}{(\omega_1 t)^{1/3}}, \quad \ddot{u}_{n,0}(t) \approx -\frac{nP_0 c_R}{k_1 l t} \frac{\text{Ai}'(\kappa)}{(\omega_1 t)^{2/3}}, \quad (6)$$

$$\dot{v}_{n,0}(t) = -\frac{P_0 l^2 \alpha_1}{4M c_R} \frac{\text{Gi}(\kappa)}{(\alpha t)^{1/3}}, \quad \ddot{v}_{n,0}(t) = \frac{P_0 l^2 \alpha_1}{4M} \frac{\text{Gi}'(\kappa)}{(\alpha t)^{2/3}},$$

$$\text{Ai}(\kappa) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\kappa z + \frac{z^3}{3}\right) dz, \quad \text{Gi}(\kappa) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin\left(\kappa z + \frac{z^3}{3}\right) dz, \quad \alpha = \frac{l^2 c_R}{8}, \quad \tilde{\kappa} = \frac{2(nl - c_R t)}{(l^3 \omega_1 t)^{1/3}}.$$

Здесь Ai – функция Эйри, Gi – функция Скорера [7].

Численное решение

Уравнения (1), (2) с начальными условиями (3) решались методом конечных разностей по явной схеме. Условие устойчивости уравнений: $\tau \leq l\sqrt{2M/3k_1} = 2\sqrt{2}/3$, где τ – шаг по времени.

Как пример расчетов уравнений (1), (2) на рис. 3 толстыми линиями представлены осциллограммы скоростей \dot{u} и \dot{v} массы с координатами ($m=0, n=80$) на поверхности блочного полупространства при действии вертикальной сосредоточенной силы ($\tau=0.314, P_0=1, \lambda_1=\lambda_2=0$). Тонкие кривые на рис. 3 соответствуют аналитическому решению (6). Вертикальные линии соответствуют моментам времени прихода продольных, сдвиговых и релеевских волн: $t_p = n/c_p, t_s = n/c_s, t_R = n/c_R$ (4),(5). На рис. 3 видно, что аналитическое решение и качественно, и количественно соответствует результатам численных расчетов. Таким образом, анализ рис. 3 и аналитического решения (6) показывает, что на поверхности полупространства при отсутствии вязких прослоек максимальные амплитуды скоростей перемещений \dot{u} и \dot{v} в окрестности волны Релея $nl = c_R t$ падают как $t^{-1/3}$ (или $n^{-1/3}$), когда $t \rightarrow \infty$ (или $n \rightarrow \infty$). При этом максимальные амплитуды ускорений падают как $t^{-2/3}$ (или $n^{-2/3}$), ширина квазифронта (зона роста возмущений от нуля до максимума) растет как $t^{1/3}$ (или $n^{1/3}$).

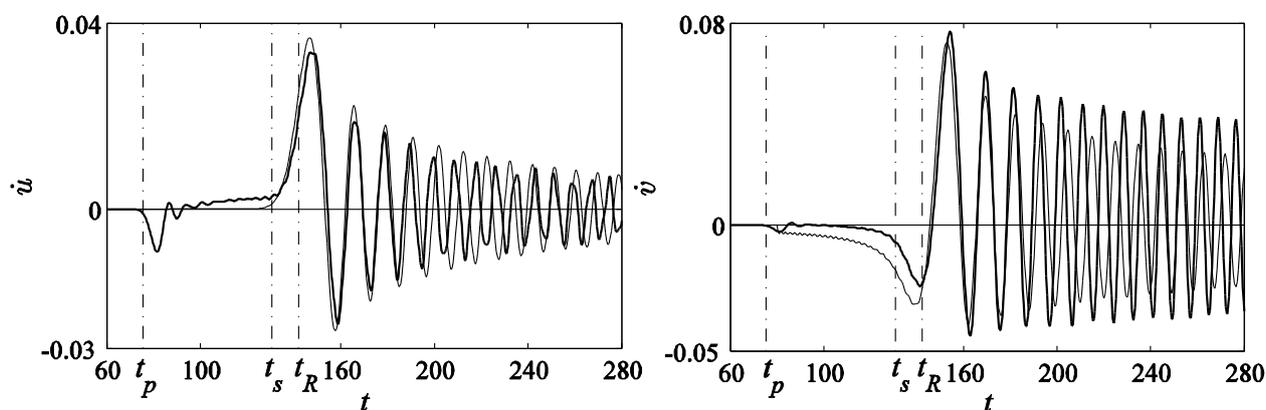


Рис. 3

На рис. 4 приведены осциллограммы возмущений на поверхности блочного полупространства в точке с координатами $n = 60$ при различных значениях вязкости ($\tau=0.314, P_0=1, \lambda_1=2\lambda_2$). Тонкие линии соответствуют значению $\lambda_1 = 0$, линии средней толщины – $\lambda_1 = 0.1$ и толстые линии – $\lambda_1 = 0.4$. Анализ осциллограмм перемещений показывает, что с ростом параметра вязкости позади фронта релеевской волны горизонтальные перемещения стремятся к решению статической задачи Фламана о нагружении упругой полуплоскости постоянной сосредоточенной силой [3]. Введение вязкости приводит к уменьшению амплитуды высокочастотных колебаний позади фронта релеевской волны на осциллограммах скоростей перемещений и ускорений, а затем и к их полному исчезновению с ростом значения вязкости. Такое поведение возмущений ближе к реальным сейсмограммам, чем без учета вязкости.

На рис. 5 представлены зависимости максимальных амплитуд возмущений от величины параметра вязкости, полученные при тех же параметрах, что и на рис. 4. Видно заметное затухание максимальных амплитуд возмущений, вызванное демпферами.

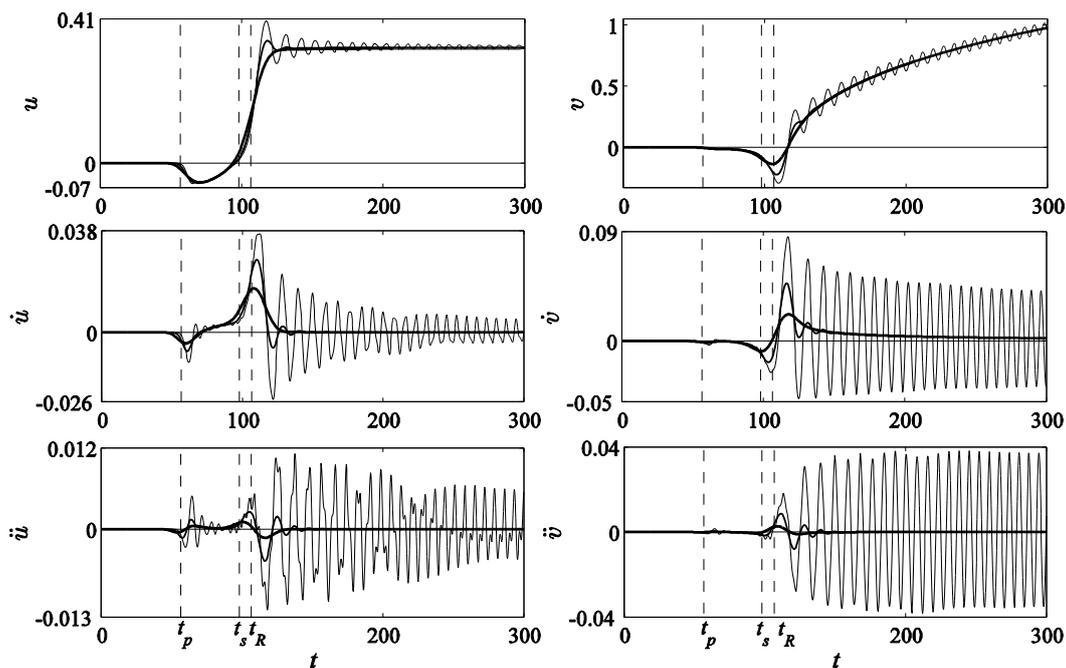


Рис. 4

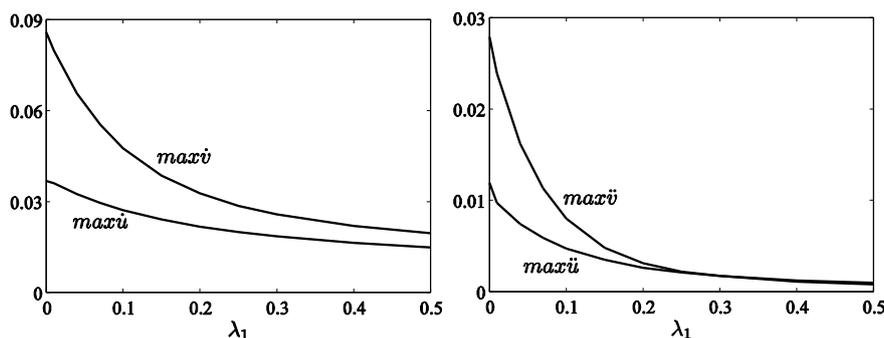


Рис. 5

Заключение

Проведенное исследование динамического поведения двумерной модели блочной среды при воздействии вертикальной сосредоточенной нагрузки на полупространство (задача Лэмба) показало, что наличие вязкости приводит к уменьшению высокочастотных медленно затухающих колебаний позади фронта волны Релея, которые отсутствуют на реальных сейсмограммах. Полученный результат свидетельствует о необходимости учета вязкости прослоек в блочной модели горных пород при расчете сейсмических волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александрова Н.И. Распространение волн в двумерной модели блочной среды при воздействии типа «центр вращения» // Геодинамика и напряженное состояние недр земли. Т. 1. Новосибирск: ИГД СО РАН, 2011. С. 257–263.
2. Александрова Н.И., Шер Е.Н. Распространение волн в двумерной периодической модели блочной среды. Ч. 1. Особенности волнового поля при действии импульсного источника // ФТПРПИ. 2010. № 6. С. 57–68.
3. Рекач В.Г. Руководство к решению задач по теории упругости. М.: Высшая школа, 1966. 228 с.
4. Садовский М.А. Естественная кусковатость горной породы // ДАН СССР. 1979. Т. 247, № 4. С. 829–832.

5. Сарайкин В.А. Распространение низкочастотной составляющей волны в модели блочной среды // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 6. С. 177–185.
6. Сарайкин В.А. Расчет волн, распространяющихся в двумерной сборке из прямоугольных блоков // ФТПРПИ. 2008. № 4. С. 32–42.
7. Abramowitz M., Stegun I.A. (eds.) Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. U.S. Department of Commerce, Washington, 1964.
8. Aleksandrova N.I. The discrete Lamb problem: Elastic lattice waves in a block medium. Wave Motion. 2014. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.wavemoti.2014.02.002>.
9. Jensen J.S. Phononic band gaps and vibrations in one- and two-dimensional mass – spring structures. Journ. of Sound and Vibration. 2003;(266):1053-1079.

Aleksandrova N.I.

NADEZDA I. ALEKSANDROVA, Chinacal Institute of Mining, Siberian Branch,
Russian Academy of Sciences, Krasnyi pr. 54, Novosibirsk, 630091, Russia, e-mail:
alex@math.nsc.ru

Lamb's plane transient problem for a block medium with consideration for its viscosity

The paper deals with Lamb's plane transient problem in the impact of a point load on the surface of a block half-space with consideration for its viscosity. The block medium is modelled by a homogeneous two-dimensional lattice consisting of masses connected by springs and dampers in the directions of the axes x , y , and in diagonal directions. The problem has been considered in planar setting. Using the finite difference method and the explicit scheme, we have studied numerically the effect which the viscosity has on the dynamic behaviour of the two-dimensional model of the block medium under the action of a vertical point load on the half-space. The problem has been solved analytically without consideration for viscosity.

Key words: block medium, seismic wave, Lamb's problem, impulse loading.

REFERENCES

1. Aleksandrova N.I. Wave propagation in a two-dimensional model of a block medium under the action of the "center of rotation". Geodynamics and the state of stress within the earth. Vol. 1, Novosibirsk Institute of Mining SB RAS, 2011, p. 257-263. (in Russ.). [Aleksandrova N.I. Rasprostranenie voln v dvumernoj modeli blochnoj sredy pri vozdejstvii tipa «centr vrashhenija» // Geodinamika i naprjazhennoe sostojanie nedr zemli. Vol. 1. Novosibirsk: IGD SO RAN, 2011. S. 257–263].
2. Aleksandrova N.I., Sher E.N. Wave propagation in two-dimensional periodic pattern block medium. P. 1. Features of the wave field under the action of a pulsed source. FTPRPI. 2010;6:57-68. (in Russ.). [Aleksandrova N.I., Sher E.N. Rasprostranenie voln v dvumernoj periodicheskoj modeli blochnoj sredy. Ch.1. Osobennosti volnovogo polja pri dejstvii impul'snogo istochnika // FTPRPI. 2010. № 6. C. 57–68].
3. Rekach V.G. Guide to solving problems in the theory of elasticity. M.: High School: 1966. 228 p. (in Russ.). [Rekach V.G. Rukovodstvo k resheniju zadach po teorii uprugosti. M.: Vysshaja shkola, 1966. 228 s.].
4. Sadovsky M.A. Natural lumpiness of rock. Akad. 1979;(247)4:829-832. (in Russ.). [Sadovskij M.A. Estestvennaja kuskovatost' gornoj porody // DAN SSSR. 1979. T. 247, № 4. S. 829–832].
5. Saraykin V.A. Spread of low-frequency component waves in the block medium. J. Appl. 2009;(50)6:177-185. (in Russ.). [Sarajkin V.A. Rasprostranenie nizkochastotnoj sostavljajushhej volny v modeli blochnoj sredy // PMTF. 2009. T. 50, № 6. S. 177–185].
6. Saraykin V.A. Calculation of waves propagating in a two-dimensional assembly of rectangular blocks. FTPRPI. 2008;4:32-42. (in Russ.). [Sarajkin V.A. Raschet voln, rasprostranjajushhihsja v dvumernoj sborke iz prjamougol'nyh blokov // FTPRPI. 2008. № 4. S. 32–42].
7. Abramowitz M., Stegun I.A. (eds.) Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. U.S. Department of Commerce, Washington, 1964.
8. Aleksandrova N.I. The discrete Lamb problem: Elastic lattice waves in a block medium. Wave Motion. 2014. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.wavemoti.2014.02.002>.
9. Jensen J.S. Phononic band gaps and vibrations in one- and two-dimensional mass – spring structures. Journ. of Sound and Vibration. 2003;(266):1053-1079.