

УДК 519.87.004

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМА ТЕЛ В ЗАДАЧАХ ПРИКЛАДНОЙ ГЕОИНФОРМАТИКИ

**Игорь Георгиевич Вовк**

Доктор технических наук, профессор, e-mail: vovkig383@rambler.ru

**Анна Андреевна Епифанцева**

ООО «Экслинг», 630091, Россия, Новосибирск, ул. Романова, 39, преподаватель, e-mail: Anuta\_m@rambler.ru

Необходимость вычисления объемов тел постоянно возникает в повседневной практической деятельности людей. В курсах классической геометрии и математического анализа приводятся различные методы решения этой задачи. Однако, для тел сложной геометрической формы вычисление их объема с необходимой точностью затруднительно. В статье обсуждается методика вычисления объема тел, основанная на построении числовых последовательностей оценок измеряемого объема «сверху» и «снизу». Это позволяет в процессе вычислений оценивать предельную погрешность вычисления объема тела и завершать процесс вычислений при достижении требуемой точности. В статье приводятся результаты вычисления объема тел по обсуждаемой методике. Выполнено сравнение результатов вычислительных экспериментов с результатами вычисления объема по аналитическим формулам. Полученные результаты свидетельствуют, что обсуждаемая методика позволяет вычислять объемы тел с приемлемой для практики точностью при сравнительно небольшом числе итераций.

**Ключевые слова:** объем тела, оценка «сверху», «оценка «снизу», предельная погрешность, числовая последовательность оценок, число итераций.

Повседневная практическая деятельность людей свидетельствует о необходимости вычисления длин линий, площадей поверхностей и объемов тел на физической поверхности Земли. Вычисление площади участка физической поверхности Земли и длин линий, расположенных на этой поверхности, обсуждается в [1–3]. Здесь рассмотрим вычисление объемов тел, связанных с физической поверхностью Земли.

Необходимость вычисления объемов тел возникает в строительной отрасли, геодезической гравиметрии и гравиразведке [4], в прикладной геоинформатике и геодезии [5–7], в задачах обеспечения безопасности [8], в горном деле и маркшейдерии, а также во многих других областях знания.

Объем трехмерного тела – числовая характеристика тела, определяющая объем пространства, занимаемого телом. Объем тела определяется границей, отделяющей его от внешней среды. Геометрическим образом границы тела служат линии и поверхности. Поэтому задача вычисления объема тела тесным образом связана с задачами вычисления длин линий и площади поверхностей, ограничивающих измеряемый объем [9, 10].

Если тело  $G$  имеет кусочно-гладкую поверхность, то его объем  $V(G)$  определяется следующим образом [11]. Тело  $G$  разделяется на элементарные части (порции), объем которых известен или может быть легко вычислен. Из этих частей конструируется многогранник  $P$ , лежащий в теле  $G$ , и многогранник  $Q$ ,

содержащий в себе тело  $G$ . Вычислим объемы  $V(P)$  и  $V(Q)$  этих многогранников и запишем очевидное неравенство

$$V(P) \leq V(G) \leq V(Q).$$

Значения  $V(P)$  и  $V(Q)$  приблизительно оценивают измеряемый объем с недостатком (снизу) и с избытком (сверху) соответственно. Данное неравенство позволяет сконструировать простой итеративный алгоритм для вычисления объема тел, ограниченных правильно параметризованными поверхностями [12]. Одна итерация с номером  $j$  включает вычисление объемов  $V(P_j)$  и  $V(Q_j)$  при фиксированной величине элементарной порции объема. Повторяя эту процедуру для уменьшающихся порций объема, получим две числовые последовательности значений  $V(P_j)$  и  $V(Q_j)$  и приблизительно оценим измеряемый объем средним значением

$$V(G_i) = \frac{[V(P_i) + V(Q_i)]}{2},$$

предельная погрешность которого

$$DV(G_i) \leq \frac{V(Q_i) - V(P_i)}{2}.$$

Процесс вычислений продолжается пока не будет достигнута необходимая точность или не будут исчерпаны имеющиеся вычислительные ресурсы.

Рассмотрим применение этой процедуры на практике по программе, составленной авторами. Вычислим объем трех тел, вырезанных цилиндром из полусферы. Центр сферы поместим в начало координат  $OXYZ$ , ось цилиндра направим перпендикулярно плоскости  $OXY$  и, используя методы геометрического моделирования, представим на рис. 1 три варианта предложенной ситуации. Результаты вычислений измеряемого объема и предельной относительной погрешности будем представлять в графическом виде.

В первом варианте радиус цилиндра  $r$  равен радиусу сферы  $R$  и для сферы единичного радиуса определяемый объем полусферы равен

$$\frac{2 \cdot \pi}{3} = 2,094\ 395\ 102\ 393\ 195\ 3.$$

Результаты вычисления этого объема по изложенному алгоритму показаны в графическом виде на рис. 2. На рис. 2,  $a$  показаны три числовые последовательности оценки измеряемого объема «сверху», «снизу» и их средних значе-

ний в зависимости от номера  $Q$  итерации вычислительного процесса (обозначено  $CB_Q$ ,  $CH_Q$ ,  $CP_Q$  соответственно); на рис. 2, б приведены данные  $\Delta_Q$  предельной погрешности вычисляемого объема в зависимости от номера итерации.

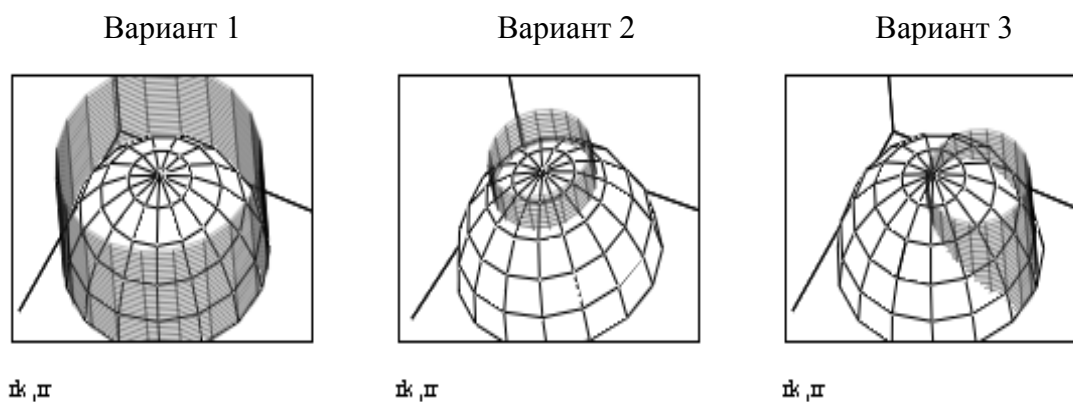


Рис. 1. Три варианта определения тела, вырезанного цилиндром из полусферы

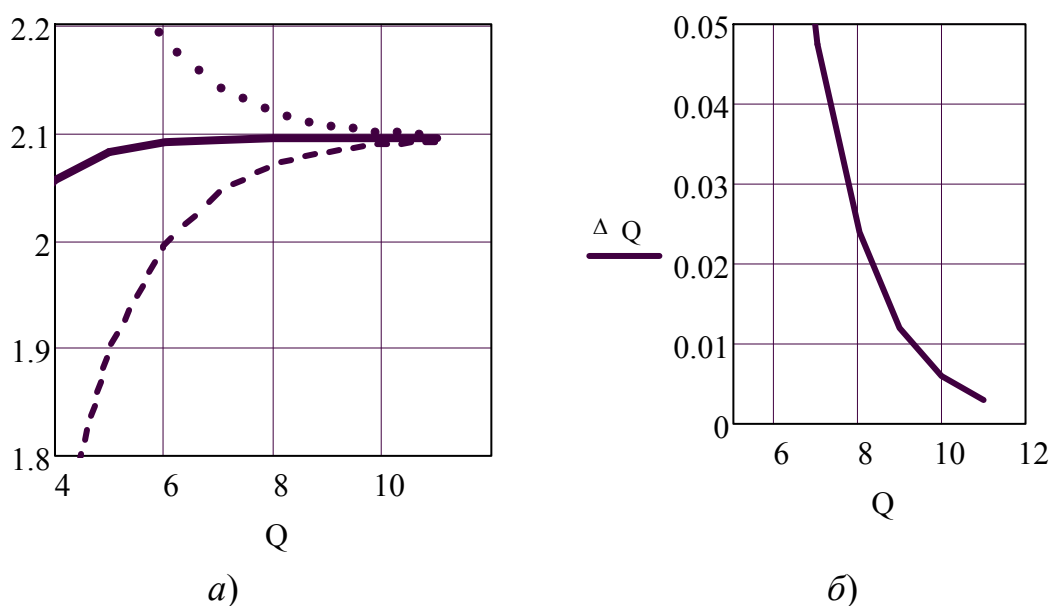


Рис. 2. Результаты вычисления объема тела, вырезанного цилиндром из полусферы (вариант 1):

..... –  $CB_Q$ ; - - - - -  $CH_Q$ ; —  $CP_Q$

Во втором варианте радиус цилиндра равен 0,2 радиуса сферы. Вычисленный аналитически объем вырезанного тела равен 0,124 398 563 264 572 24. Результаты вычисления объема по рассмотренному алгоритму для этого варианта в графическом виде показаны на рис. 3. Обозначения на этом рисунке те же, что и на рис. 2.

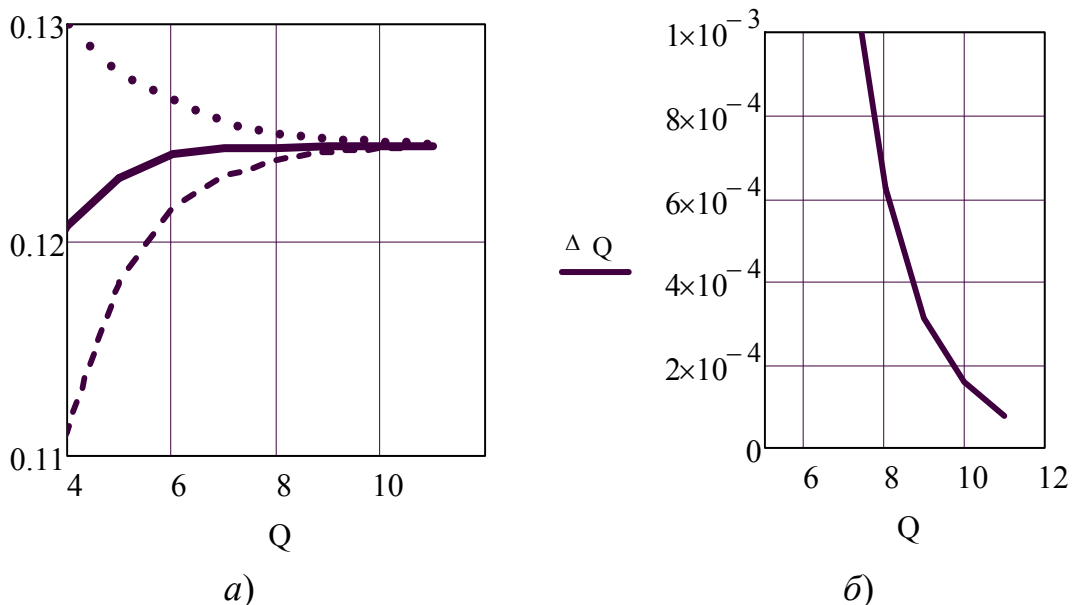


Рис. 3. Результаты вычисления объема тела, вырезанного цилиндром из полусферы (вариант 2):

..... –  $CB_Q$ ; - - - - -  $CH_Q$ ; —  $CP_Q$

В третьем варианте радиус цилиндра равен половине радиуса сферы и ось цилиндра смещена в точку  $C(0; 0,5; 0)$ . Результаты вычисления объема этого тела, вычисленные по изложенному алгоритму, приведены на рис. 4 в ранее принятых обозначениях.

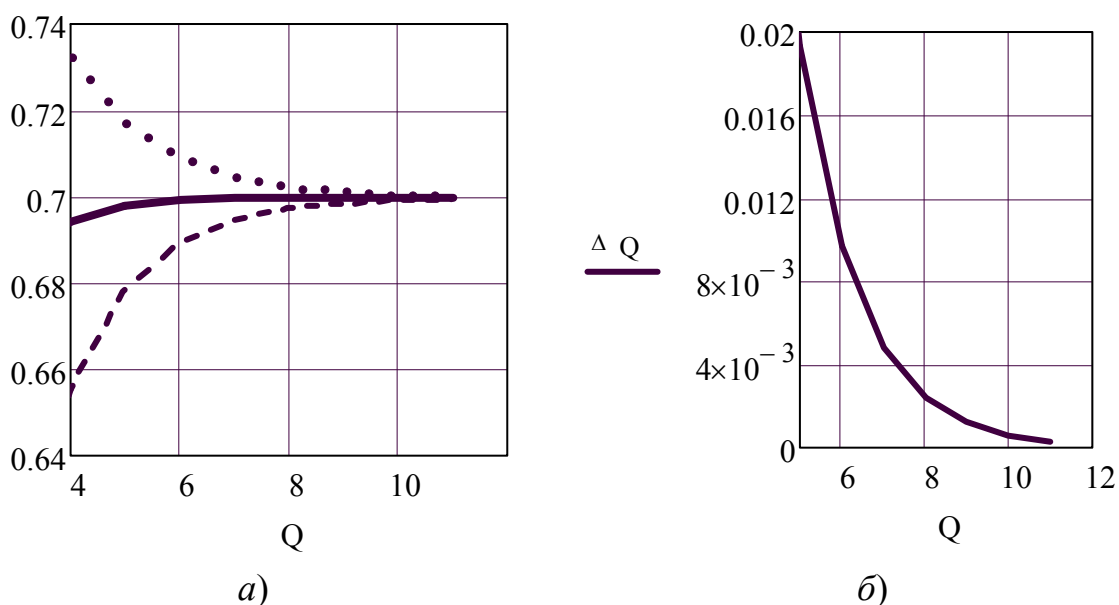


Рис. 4. Результаты вычисления объема тела, вырезанного цилиндром из полусферы (вариант 3):

..... –  $CB_Q$ ; - - - - -  $CH_Q$ ; —  $CP_Q$

Полученные результаты свидетельствуют, что рассмотренный алгоритм обеспечивает вычисление объемов тел с приемлемой для практики точностью при сравнительно небольшом числе итераций.

Применим этот алгоритм для вычисления объема тела, ограниченного правильно параметризованной топографической поверхностью, изображенной на рис. 5, и плоскостью  $OXY$ .

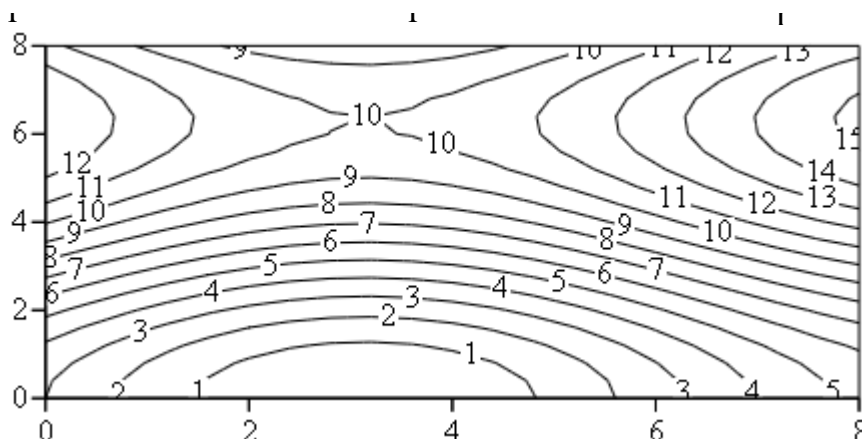


Рис. 5. Топографическая поверхность, ограничивающая измеряемый объем сверху

Результаты вычислений представлены в графическом виде на рис. 6. Содержание графических данных на этом рисунке аналогично содержанию, представленному на рис. 2 в ранее принятых обозначениях.

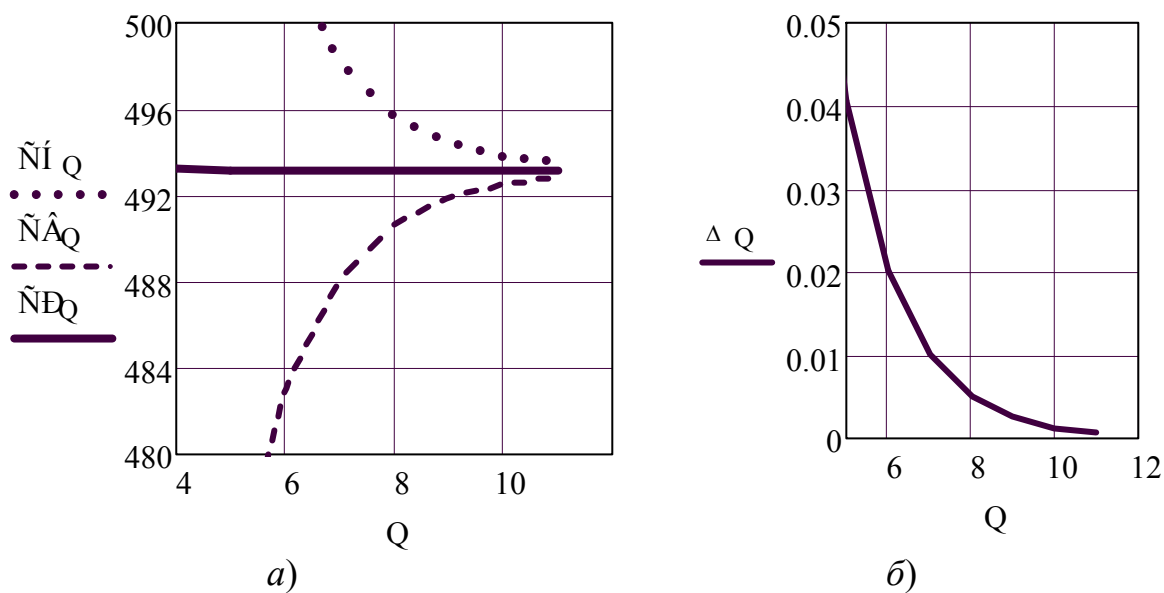


Рис. 6. Результаты вычисления объема тела, ограниченного топографической поверхностью и плоскостью  $OXY$ :

..... –  $CB_Q$ ; - - - - -  $CH_Q$ ; — — — — —  $CP_Q$

Таким образом, методика вычисления объема, изложенная в [11, 12] и предложенный алгоритм ее реализации, обеспечивают практическую возможность вычисления объемов тел с достаточной для практики точностью в разнообразных задачах прикладной геоинформатики.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вовк И. Г. Вычисление площади участка физической поверхности Земли в задачах прикладной геоинформатики // Интерэкспо ГЕО-Сибирь-2015. XI Междунар. науч. конгр. : Междунар. науч. конф. «Геодезия, геоинформатика, картография, маркшейдерия» : сб. материалов в 2 т. (Новосибирск, 13–25 апреля 2015 г.). – Новосибирск : СГУГиТ, 2015. Т. 1. – С. 5–9.
2. Вовк И. Г., Епифанцева А. А. Вычисление площади участка физической поверхности Земли // Гуманитарные науки и образование в Сибири. – 2015. – № 3 (21). – С. 88–93.
3. Вовк И. Г., Епифанцева А. А. Вычисление длины линии, расположенной на физической поверхности Земли // Вестник СГУГиТ. – 2016. – Вып. 1 (33). – С. 101–106.
4. Гравиразведка. Справочник геофизика. – М. : Недра, 1961. – 397 с.
5. Вовк И. Г. Вариации гравитационного поля при изменении уровня водохранилища // Геодезия и картография. – 1982. – № 9. – С. 12–15.
6. Обиденко В. И. Разработка и исследование специализированной программы для определения метрических параметров территории Российской Федерации // Вестник СГГА. – 2012. – Вып. 3 (19). – С. 18–29.
7. Обиденко В. И. Технология определения метрических параметров территории Российской Федерации по геопространственным данным // Вестник СГГА. – 2012. – Вып. 3 (19). – С. 3–18.
8. Акимов В. А., Воробьев Ю. Л., Фалеев М. И. Безопасность в чрезвычайных ситуациях природного и техногенного характера. – М. : Высшая школа, 2006. – 592 с.
9. Вовк И. Г. Определение геометрических инвариантов пространственной кривой в прикладной геоинформатике // Вестник СГГА. – 2012. – Вып. 3 (19). – С. 51–62.
10. Вовк И. Г. Определение геометрических инвариантов поверхности в прикладной геоинформатике // Вестник СГГА. – 2012. – Вып. 4 (20). – С. 59–69.
11. Математическая энциклопедия. Т. 1. / Под ред. И. М. Виноградова. – М. : Советская энциклопедия, 1977.
12. Фихтенгольц И. Г. Основы математического анализа. – М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 465 с.

Получено 13.02.2017

© И. Г. Вовк, А. А. Епифанцева 2017

#### **CALCULATING THE BODIES' VOLUME IN THE TASKS OF APPLIED GEOINFORMATICS**

*Igor' G. Vovk*

Dr. Sc., Professor, e-mail: vovkig383@rambler.ru

*Anna A. Epifantseva*

ООО «Exlinguo», 630091, Russia, Novosibirsk, 39 Romanova St., e-mail: Anuta\_m@rambler.ru

Calculating the volume of bodies is necessary in everyday human activities. You can find multiple methods to solve this problem in the literature on classical geometry and mathematical analysis. But it is very difficult to calculate volume of bodies with complex geometric shapes and

find a solution with required accuracy. The article offers an examination of a method used to calculate the volume and/or the size of some bodies, which is based on some certain numerical sequence drawn up to assess the volume and/or the size to be calculated 'from above' as well as 'from below'. It allows evaluating limiting measurement error in the process of volume calculation and completing this process in achieving the required accuracy. Here are quoted the results obtained by means of calculating the bodies' volume and/or their size through the use of this method. The results of the calculating experiments have been compared to those obtained when calculating the volume and/or the size according to some analytical formulas. The results which have been obtained here have demonstrated the fact that this method enables our calculating the volumes of bodies with some certain accuracy quite acceptable for practical purposes whereas the number of operations which are necessary is rather small.

**Key words:** body volume, calculation 'from above', 'from below', limiting measurement error, numerical sequences, number of iterations.

## REFERENCES

1. Vovk, I. G. (2015). Calculating the Area of Some Earth's Physical Surface Part in Applied Geoinformatics Tasks. In *Sbornik materialov Interekspo GEO-Sibir'-2015: Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii: T. 1. Geodezia, Geoinformatika, kartografiya, marksheideria [Proceedings of Interexpo GEO-Siberia-2015: International Scientific Conference: Vol. 1. Geodesy, Geoinformatic, Cartography, Markscheidery]* (pp. 5–9). Novosibirsk: SSUGT [in Russian].
2. Vovk, I. G., & Epifantseva, A. A. (2015). Calculating the Area of Earth's Physical Surface. *Gumanitarnye nauki i obrazovanie v Sibiri [The Humanities and Education in Siberia]*, 3(21), 88–93 [in Russian].
3. Vovk, I. G., & Epifantseva, A. A. (2016). Calculation of The length of a Line Placed on the Earth Surface in Applied Geoinformatics Problems. *Vestnic SGUGiT [Vestnic SSUGT]*, 1(33), 101–106 [in Russian].
4. *Gravirazvedka. Spravochnik geofizika [Gravity. Directory of geophysics]*. (1961). Moscow: Subsoil [in Russian].
5. Vovk, I. G. (1982). Variations of a gravitational field at change of a level of reservoir. *Geodezia i kartografiya [Geodesy and Cartography]*, 9, 12–15 [in Russian].
6. Obidenco, V. I. (2012). Working Out and Research of the Specialized Software for Definition of Metric Parameters of Territory of the Russian Federation. *Vestnik SSGA [Vestnik SSGA]*, 3(19), 18–29 [in Russian].
7. Obidenco, V. I. (2012). Technology of Definition of Metric Parameters of Territory of the Russian Federation under the Geospatial Data. *Vestnik SSGA [Vestnik SSGA]*, 3(19), 3–13 [in Russian].
8. Akimov, V. A., Vorobyov, L. Y., & Faleev, M. I. (2006). *Bezopasnost' w threzwithainih situaciih prirodnogo i tehnogennoho haractera [Secure emergency natural and manmade situations]*. Moscow: High School [in Russian].
9. Vovk, I. G. (2012). Defining Geometrical Invariants of Space Curve in Applied Geoinformatics. *Vestnic SSGA [Vestnic SSGA]*, 3(19), 52–61 [in Russian].
10. Vovk, I. G. (2012). Defining Geometrical Invariants of the Surface in Applied Geoinformatics. *Vestnic SSGA [Vestnic SSGA]*, 4(20), 59–68 [in Russian].
11. *Matematicheskaya entsiklopediya: T. 1 [Encyclopedia of Mathematics: Vols. 1]*. (1977). I. M. Vinogradov (Ed.). Moscow: Soviet Encyclopedia [in Russian].
12. Fikhtengol'ts, I. G. (1960). *Osnovy matematicheskogo analiza [Fundamentals of mathematical analysis]*. Moscow: State Publ. of Physical and Mathematical Literature [in Russian].

Received 13.02.2017

© I. G. Vovk, A. A. Epifantseva, 2017