

ДЕФОРМИРОВАНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ ОБРАЗЦОВ ПОРОД С ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ВСТАВКОЙ

Андрей Анатольевич Красновский

Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, 630091, Россия, г. Новосибирск, Красный проспект, 54, кандидат физико-математических наук, e-mail: visanta@ngs.ru

Получена система сингулярных интегральных уравнений, связывающая значения компонент напряжений и смещений на контуре образца пород с прямоугольной вставкой из другого материала и на границе раздела свойств пород. Представлена численная реализация этих уравнений. Проведен анализ полученных результатов.

Ключевые слова: упругость, решение, система уравнений, напряжения, смещения, образец пород.

DEFORMATION OF PIECEWISE-HOMOGENEOUS ROCK SPECIMENS WITH A RECTANGULAR INSERTION

Andrey A. Krasnovsky

Chinakal Institute of Mining SB RAS, 630091, Russia, Novosibirsk, 54 Krasny prospect, Ph. D., e-mail: visanta@ngs.ru

The singular integral equation set relates values of stress and shear components on the contour of a rock specimen with a rectangular insertion made of other material and at interface of rock properties. The numerical realization of these equations is presented with the analysis of obtained experimental results.

Key words: elasticity, solution, equation set, stress, shear, rock specimen.

Рассмотрение неоднородных тел имеет большое значение для современной механики горных пород. Знание напряженно-деформированного состояния необходимо при расчетах на прочность, для обеспечения которых необходимо иметь все компоненты напряжений и смещений на границе, что обеспечивает контроль за возможностью начала разрушения. Расчету упругих составных конструкций посвящено много публикаций [1-3]. Во всех таких исследованиях прослеживается основной метод решения. Это метод введения правдоподобных гипотез о возможности пренебречь теми или иными компонентами перемещений и напряжений или априори задать их вид. Главное отличие слоистых конструкций от однородных заключается в более сложной структуре напряженно-деформированного состояния. Заранее нельзя предсказать какими компонентами напряжений и смещений можно пренебречь, а какими – нет, что, в конечном счете определяется геометрией и расположением слоев, их механическими постоянными. Аналитические решения для таких конструкций до настоящего времени практически отсутствовали и на первое место вышли численные методы. Целью работы является применительно к упругим кусочно-однородным средам, рассмотреть одновременно и единообразно все три основные задачи и предложить методы их реализации. Полученные решения являются удобной основой для решения задач о деформировании слоистых образцов при произвольном нагружении.

Рассмотрим деформирование кусочно-однородного образца пород, схема которого представлена на рис. 1. Граничные условия, в качестве примера, сформулируем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_n = \sigma_0 = -1, u = 0 & \text{ на гранях } -b \leq x \leq b, y = -h \text{ и } y = h, \\ \sigma_n = 0, \tau_n = 0 & \text{ на гранях } -h \leq y \leq h, x = -b \text{ и } x = b. \end{aligned} \quad (1)$$

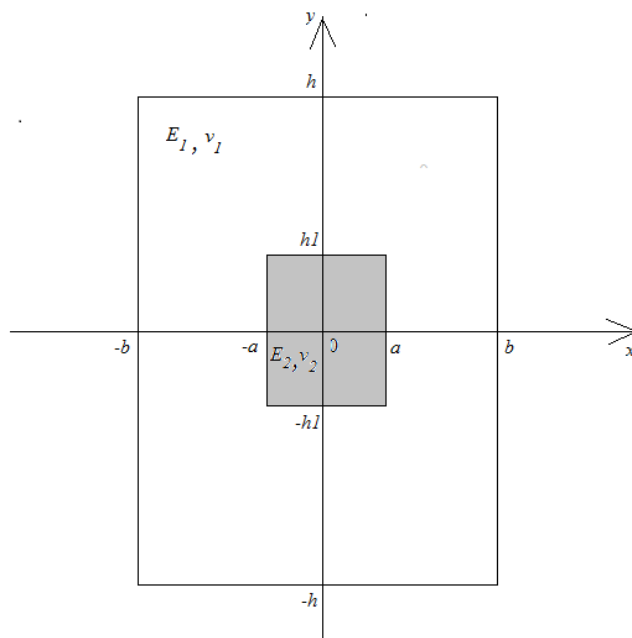


Рис. 1. Схема кусочно-однородного образца пород

Учитывая геометрическую и силовую симметрию, будем рассматривать четверть образца пород (рис. 2) с контуром $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, ($\Gamma_1 = \Gamma_{11} + \Gamma_{12} + \Gamma_{13} + \Gamma_{14} + \Gamma_{15} + \Gamma_{16}$, $\Gamma_2 = \Gamma_{21} + \Gamma_{22} + \Gamma_{23} + \Gamma_{24}$), где $\Gamma_{11}: a \leq x \leq b, y = 0$; $\Gamma_{12}: 0 \leq y \leq h, x = b$; $\Gamma_{13}: 0 \leq x \leq b, y = h$; $\Gamma_{14}: hl \leq y \leq h, x = 0$; $\Gamma_{15}: 0 \leq x \leq a, y = hl$; $\Gamma_{16}: 0 \leq y \leq hl, x = a$; $\Gamma_{21}: 0 \leq x \leq a, y = 0$; $\Gamma_{22}: 0 \leq y \leq hl, x = a$; $\Gamma_{23}: 0 \leq x \leq a, y = hl$; $\Gamma_{24}: 0 \leq y \leq hl, x = 0$, для которого сформулируем граничные условия в виде:

$$\begin{aligned} v = 0, \tau_n = 0 & \text{ на } \Gamma_{21} + \Gamma_{11}, \\ u = 0, \tau_n = 0 & \text{ на } \Gamma_{24} + \Gamma_{14}, \\ \sigma_n = 0, \tau_n = 0 & \text{ на } \Gamma_{12}, \\ \sigma_n = -1, u = 0 & \text{ на } \Gamma_{13}, \end{aligned} \quad (2)$$

где σ_n, τ_n – нормальные и касательные напряжения; u, v – горизонтальная и вертикальная компоненты смещений.

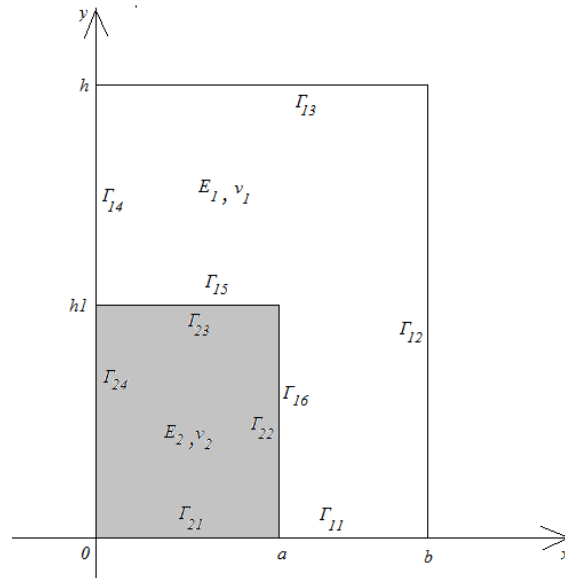


Рис. 2. Расчетная схема четверти кусочно-однородного образца пород

В данной постановке образец пород состоит из двух частей, каждая из которых представляет собой односвязную область.

Система сингулярных интегральных уравнений, связывающая граничные значения компонент напряжений и смещений для произвольной односвязной области имеет вид [4]

$$f(t_0) + 2\mu g(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) + 2\mu g(t)}{t - t_0} dt, \quad (3)$$

$$k \overline{f(t_0)} - 2\mu \overline{g(t_0)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{k \overline{f(t)} - 2\mu \overline{g(t)}}{t - t_0} dt - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} (f(t) + 2\mu g(t)) d \frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0},$$

где $k = 3 - 4\nu$, $\mu = E[2(1 + \nu)]^{-1}$, ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга; $\mathbf{g} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$; \mathbf{u} , \mathbf{v} – касательные и нормальные компоненты смещений в точках на Γ ;

$$f(t) = i \int_0^t (X_n + iY_n) ds, \quad (4)$$

X_n , Y_n – усилия на Γ в направлении осей x и y ; $t \in \Gamma$, t_0 – аффикс точки границы; черточка над функцией обозначает сопряженное значение; i – мнимая единица.

Предполагается, что на границе раздела свойств частей кусочно-однородного образца пород имеет место сцепление

$$\sigma_n^1 = \sigma_n^2, \quad \tau_n^1 = \tau_n^2, \quad u^1 = u^2, \quad v^1 = v^2, \quad (5)$$

т. е. непрерывность нормальных и касательных компонент напряжений и смещений, где верхний индекс соответствует номеру части образца пород.

На основании (3) – (5) получена система уравнений, связывающая граничные значения компонент напряжений и смещений на контуре четверти кусочно-однородного образца пород и границе раздела свойств, имеющая вид, аналогичный [4]. Например, уравнение для $u_1^2(x)$ на Γ_{21} :

$$\begin{aligned}
4\mu_2 u_1^2(x) = & (\kappa_2 - 1)f_{11}^2(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{(\kappa_2 + 1)f_{12}^2}{s - x} ds + \\
& + \frac{1}{\pi} \int_0^{h1} \frac{(a - x)[4\mu_2 u_2^2 - (\kappa_2 - 1)f_{21}^2] + (\kappa_2 + 1)sf_{22}^2}{(a - x)^2 + s^2} ds + \\
& + \frac{1}{\pi} \int_a^0 \frac{(\kappa_2 + 1)(s - x)f_{32} + (h1)[(\kappa_2 - 1)f_{31}^2 - 4\mu_2 u_3^2]}{(s - x)^2 + (h1)^2} ds + \\
& + \frac{1}{\pi} \int_{h1}^0 \frac{(\kappa_2 + 1)sf_{42}^2 - x[4\mu_2 u_4^2 - (\kappa_2 - 1)f_{41}^2]}{s^2 + x^2} ds - \\
& - \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{h1} \frac{2(a - x)[s^2 - (a - x)^2](f_{21}^2 + 2\mu_2 u_2^2) - 4s(a - x)^2(f_{22}^2 + 2\mu_2 u_2^2)}{[s^2 + (a - x)^2]^2} ds + \right. \\
& + \int_a^0 \frac{4(h1)^2(s - x)(f_{32}^2 + 2\mu_2 u_3^2) + 2(h1)[(s - x)^2 - (h1)^2](f_{31}^2 + 2\mu_2 u_3^2)}{[(s - x)^2 + (h1)^2]^2} ds + \\
& \left. + \int_{h1}^0 \frac{-4sx^2(f_{41}^2 + 2\mu_2 u_4^2) + 2x(x^2 - s^2)(f_{42}^2 + 2\mu_2 u_4^2)}{(s^2 + x^2)^2} ds \right\}.
\end{aligned}$$

Отнеся, все линейные размеры к a , а величины, имеющие размерность напряжений, к σ_0 , получаем ее численную реализацию, результаты которой распространены по симметрии для всего образца пород (рис. 1) для наглядности. Расчеты проводились при $h = 6$, $b = 3$, $\nu = 0.25$, $E_2 = 3E_1 = 3 \cdot 10^4$ для случаев:

$$1) h1 = 2; a = 1; \quad 2) h1 = 1; a = 1; \quad 3) h1 = 1; a = 2. \quad (6)$$

На рис. 3 представлено деформирование периметра и границы раздела свойств образца пород для случаев (6) соответственно.

На рис. 4 приведены результаты расчета горизонтальной компоненты смещений $u(x)$ боковой грани образца пород ($-h \leq y \leq h$, $x = b$ (рис. 1)). Кривым 1, 2, 3 соответствуют случаи $h1/a = 2$; $h1/a = 1$; $h1/a = 0.5$ соответственно.

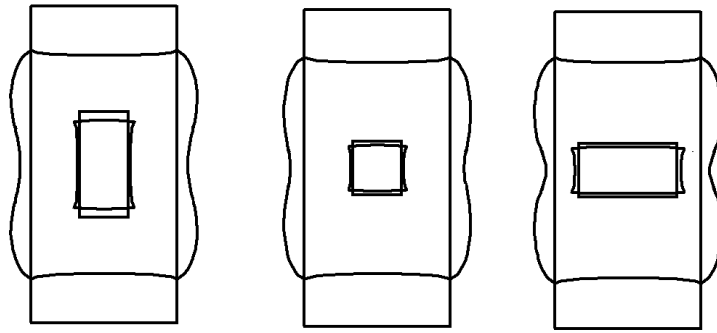


Рис. 3. Деформирование периметра кусочно-однородного образца пород
при $E_2 = 3E_1$

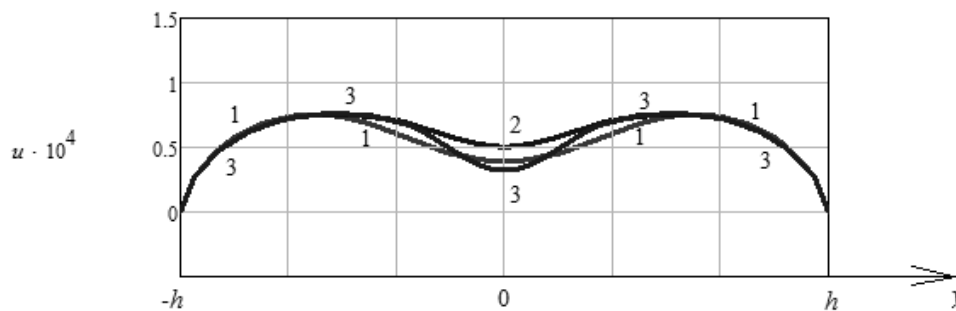


Рис. 4. Граничные значения горизонтальных смещений
боковой грани $-h \leq y \leq h$, $x = b$

Таким образом, получена система сингулярных интегральных уравнений, связывающая граничные значения компонент напряжений и смещений на контуре образца пород с прямоугольной вставкой из другого материала и границе раздела свойств пород, в предположении симметрии, описанной выше. Представление решения в интегральной форме позволяет осуществить как изучение самого решения, так и организацию варьирования входящими параметрами задачи для достижения желаемых свойств решения. Приведена численная реализация этих уравнений. Полученные результаты являются важной основой для дальнейших исследований, связанных с постановкой, решением и анализом результатов более сложных задач о расчете напряженно-деформированного состояния кусочно-однородных образцов пород.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости – М.: Наука, 1966. – 706 с.
2. Баренблатт Г.И., Христианович С.А. Об обрушении кровли при горных выработках // Изв. АН СССР, ОТН – 1955. – №11. – С. 73-86.
3. Михлин С.Г. О напряжениях в породе над угольным пластом. Изв. АН СССР. ОТН. – 1942– № 7. – С. 13-28.
4. Красновский А.А., Миренков В.Е. Восстановление граничных условий при сжатии пород // ФТПРПИ. – 2009. – № 4. – С. 14-22.

© А. А. Красновский, 2017