



УДК 528.481/622.83

## Метод оценки дивергенции векторных полей деформаций земной поверхности при разработке месторождений полезных ископаемых

Б.Т.МАЗУРОВ<sup>1</sup>, М.Г.МУСТАФИН<sup>2</sup> ✉, А.А.ПАМЖИН<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Сибирский государственный университет геосистем и технологий, Новосибирск, Россия

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский горный университет, Санкт-Петербург, Россия

<sup>3</sup> Институт горного дела Уральского отделения РАН, Екатеринбург, Россия

Для эффективной и безопасной разработки месторождений необходимо хорошее геомеханическое обеспечение. Сегодня широко применяют программные комплексы на основе метода конечных элементов для оценки напряженно-деформированного состояния массива горных пород. Для их качественного использования необходимо знание граничных условий и интегральных механических характеристик пород. С этой целью в горном деле всегда применяли натурные наблюдения. Основным источником данных об исходном и техногенном измененном напряженно-деформированном состоянии массива горных пород являются натурные измерения параметров процесса сдвижения. Изменения маркшейдерско-геодезических данных (координат, высот, направлений) за время между циклами измерений позволяют отобразить поле векторов смещения определяемых пунктов. Векторы смещений в совокупности дают представление о фактической картине напряженно-деформированного состояния земной поверхности. На этой основе можно вычислить тензоры деформации на исследуемом участке, направления и размеры сжатий и растяжений, сдвиговые компоненты. Однако есть дифференциальные характеристики любых физических векторных полей – ротор и дивергенция. Дивергенция представляет собой одно число (скаляр), относящееся к определенной точке. Векторное поле в целом может быть описано скалярным полем дивергенции. Дивергенция отражает знак изменения объема в бесконечно малом объеме среды и изменение величины векторов в непосредственной близости от рассматриваемой точки для всех направлений. В статье предлагается метод вычисления дивергенции по дискретным геодезическим наблюдениям смещений только на поверхности изучаемой территории. Для этого необходимо составить формулы, моделирующие поле векторов для любой точки поверхности. Предложено использовать степенные полиномы, описывающие смещения по трем направлениям ( $x, y, z$ ). По этим формулам можно вычислять векторы поля в любом месте поверхности, значит, формировать векторные трубки. Для них будут далее определяться площади входных и выходных сечений и значения дивергенции. Тем самым повышается качество оценки геодинамического состояния рассматриваемой территории, что позволит более точно выполнять моделирование нарушенного выработками массива горных пород с применением современных программных комплексов.

**Ключевые слова:** маркшейдерско-геодезические данные; техногенный массив пород; напряженно-деформированное состояние; векторное поле; дивергенция; векторные трубки; полиномиальные модели

**Как цитировать эту статью:** Мазуров Б.Т. Метод оценки дивергенции векторных полей деформаций земной поверхности при разработке месторождений полезных ископаемых / Б.Т.Мазуров, М.Г.Мустафин, А.А.Панжин // Записки Горного института. 2019. Т. 238. С. 376-382. DOI 10.31897/PMI.2019.4.376

**Введение.** Геомеханическое обеспечение технологии разработки месторождений играет важную роль в решении проблемы повышения эффективности и безопасности извлечения полезных ископаемых из недр и во многом определяет выбор оптимальных параметров систем разработки и стратегии ведения очистных работ на горнодобывающих предприятиях [2]. Обобщение напряженно-деформированного состояния (НДС) массива горных пород (МГП) выполняется на основе данных о физико-механических свойствах образцов горных пород и их использовании в программных комплексах по моделированию НДС МГП [8, 15]. Вместе с тем различные условия формирования рассматриваемого МГП, включая тектонику, блочное строение, неоднородность и трехфазное взаимодействие элементов среды, требуют натурных измерений для корректировки теоретических расчетов. Основным, а зачастую единственным источником данных об исходном и техногенно измененном напряженно-деформированном состоянии массива горных пород являются натурные измерения параметров процесса сдвижения [4, 5, 9, 17]. В данном случае под сдвижением горных пород – явлением, сопровождающим добычу полезного ископаемого, понимается весь комплекс деформационных процессов, протекающих в массиве горных пород при формировании исходного напряженно-деформированного состояния за пределами области влияния горных разработок и его трансформации внутри нее [5, 9, 10, 12].

**Постановка проблемы.** Основными факторами, определяющими формирование напряженно-деформированного состояния массива горных пород, являются: иерархически блочное строение;

кинематическая активность; вторичное структурирование; концентрация современных геодинамических движений на границах вторичных структурных блоков [2, 4, 5, 9, 13]. Под их воздействием в массиве горных пород формируется мозаичное, относительно однородное по своим усредненным интегральным параметрам, напряженно-деформированное состояние.

Для выявления параметров и закономерностей формирования исходного напряженно-деформированного состояния массива горных пород необходимо:

- экспериментально оценить уровень современных геодинамических движений и параметры формируемого ими напряженно-деформированного состояния, изменяющегося во времени;
- исследовать степень неоднородности напряженно-деформированного состояния, обусловленную вторичным структурированием массива горных пород под влиянием современных геодинамических движений и формирования вторичного поля напряжений в области горных работ.

Таким образом, необходимо получение инструментальным путем двух основных видов информации: параметров интегрального движения массива, вызванного природными и техногенными факторами, а также данных об иерархически блочной структуре горного массива и его изменениях во времени.

Данные о параметрах интегрального сдвижения горного массива можно получить только прямыми маркшейдерско-геодезическими методами с использованием глобальной навигационной спутниковой системы (ГНСС) и традиционной (тахеометры и нивелиры) геодезии [14, 16, 17, 19-23]. При этом в основу методики положены многократные мониторинговые измерения сдвижений специально оборудованных реперов, включающих пункты Государственной геодезической сети, опорной маркшейдерской сети и наблюдательных станций.

Сопоставление исходных и переопределенных в результате мониторинга пространственных координат реперов позволяет математически построить как векторы сдвижений, так и поле главных деформаций. При этом территориальные масштабы маркшейдерско-геодезических измерений различны: от десятков и сотен километров до первых метров [10, 14, 20, 23]. Примеры визуализации сдвижений и деформаций показаны на рис.1 и 2 для прибортового массива Киембаевского ГОКа.

В дальнейшем путем группировки данных о процессе сдвижения выделяют основные кластеры деформируемых структурных блоков и определяют границы между ними. По результатам геомеханического моделирования сопоставляют теоретическую и фактическую модели деформирования массива, нарушенного техногенной выемкой, и определяют параметры не только вторичного, но и исходного поля напряжений.

**Методология.** Для решения задач, связанных с геомеханическим прогнозом и локализацией очагов интенсивных деформаций, необходимо определение не только векторов сдвижений и

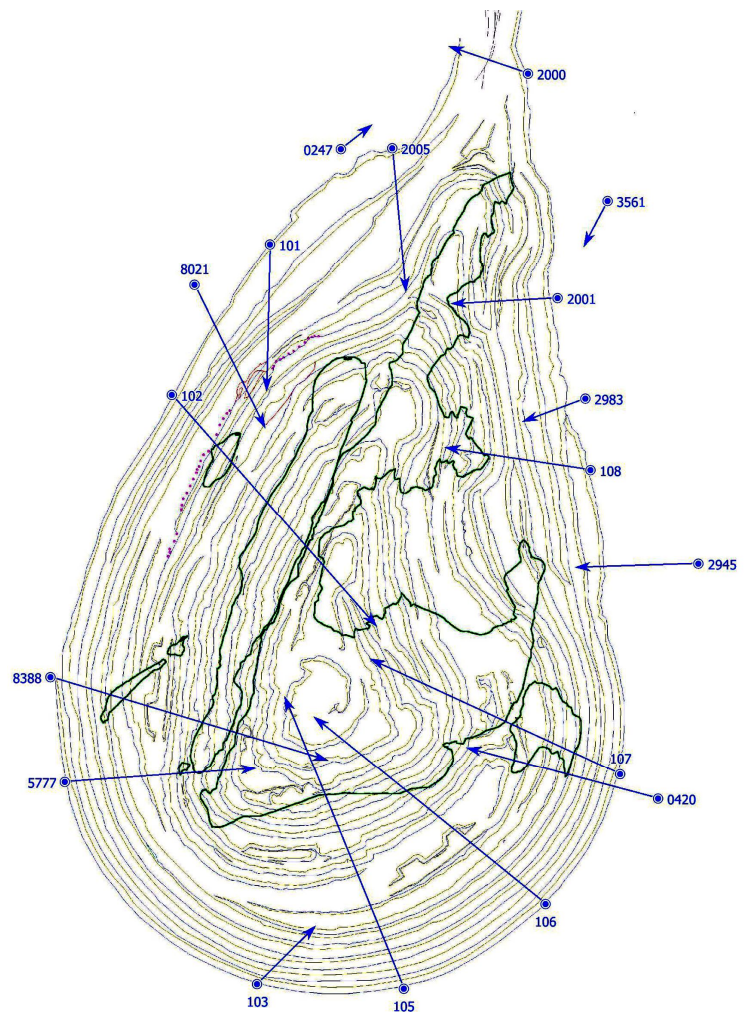


Рис.1. Горизонтальные векторы современных геодинамических движений в районе карьера за 2006-2017 годы

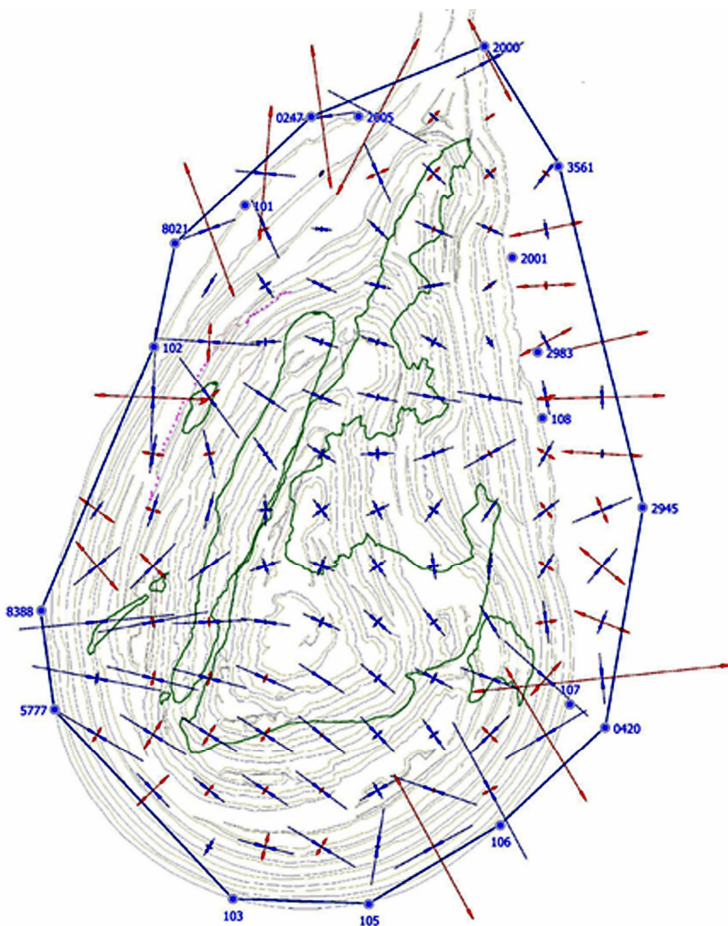


Рис.2. Тензоры горизонтальных деформаций, вызванных современными геодинамическими движениями в районе карьера за 2006-2017 годы

цией. С физической точки зрения дивергенция векторного поля количественно характеризует данную точку пространства как источник или сток этого поля. Примером интерпретации может служить озеро с двумерным векторным полем горизонтального движения воды. Положительную дивергенцию поля скоростей течения дают родники, бьющие со дна озера, отрицательную – подводные стоки с утекающей водой:

$\operatorname{div} F < 0$  – точка поля является стоком;

$\operatorname{div} F = 0$  – стоков и источников нет или они компенсируют друг друга;

$\operatorname{div} F > 0$  – точка поля является источником.

Вычисление дивергенции отражает местоположение вершин и впадин на картине градиентов (направлений наискорейшего спуска). На вершинах дивергенция положительна, во впадинах, соответственно, отрицательна.

Математическая теория поля [1, 3] может быть использована не только для описания течений в жидкостях и газах, но и для изучения потоков вещества в мантии и ядре Земли, при исследовании деформаций в сильно текущих горных породах осадочного покрова и в массах пород, испытывающих региональный метаморфизм в глубине земной коры. Сложные деформации слоев в гнейсах развивались при значительном протекании масс, закономерности которого можно понять, опираясь на математическую теорию потоков в жидкостях. Эта же теория может быть использована и для познания роли магматических расплавов в развитии тектонических процессов [13, 16, 19, 22, 23], вулканизма [6, 7], а также для изучения современных смещений крупных деформированных массивов приповерхностных структур земной коры.

Для реализации формулы (1) в реальных условиях дискретной координатизации земной поверхности и ее трехмерных сдвижений необходимо использовать понятия потока векторного поля и векторной трубки.

тензоров деформаций, но и дифференциальной характеристики векторного поля, называемой дивергенцией.

Дивергенция – одна из часто используемых дифференциальных характеристик векторного поля, представляющая собой одно число (скаляр), относящееся к определенной точке. Векторное поле в целом описывается скалярным полем дивергенции, которая отражает изменение величины векторов в непосредственной близости от рассматриваемой точки во всех направлениях. Дивергенция относится к числу объемных производных векторного поля. В математической записи определение дивергенции следующее:

$$\operatorname{div} F = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\Phi_F}{V}, \quad (1)$$

где  $\Phi_F$  – поток векторного поля  $F$  через сферическую поверхность площадью  $S$ , которая ограничивает объем  $V$ .

В общем случае допускается любая форма области с поверхностью  $S$  и объемом  $V$ . Но существует требование нахождения всей поверхности в бесконечно малой окрестности исследуемой точки. Таким образом, дивергенция (1) должна быть локальной операцией.



В векторном поле можно разделить некоторую замкнутую или незамкнутую поверхность  $\Sigma$  на малые элементы площади  $d\sigma$ . Для каждого элемента имеется свой орт нормали  $\vec{n}$  и вектор данного поля  $\vec{V}$  (средний для элемента). Поток векторного поля конкретного элемента – это скалярное произведение орта нормали  $\vec{n}$  на ее вектор  $\vec{V}$ , умноженное затем на площадь элемента  $d\sigma$ . После интегрирования по всей поверхности мы имеем общий поток векторного поля

$$Q = \iint_{\Sigma} (\vec{n} \vec{V}) d\sigma. \quad (2)$$

Для вектора  $\vec{V}$ , отображающего скорость течения материала (например, пластичных горных пород), значение  $Q$ , вычисленное по формуле (2), соответствует объему материала, протекающего в единицу времени через выбранную поверхность  $\Sigma$ .

Важным понятием теории исследования векторных полей является векторная трубка. Ее можно определить, если через произвольный замкнутый контур  $L$  в каждой его точке провести силовую линию поля (рис.3).

Разность площади выходного сечения  $S_2$  и входного сечения  $S_1$  векторной трубки при малых ее размерах и при равенстве входного и выходного векторов позволяет количественно оценить значение дивергенции. Знаки дивергенции схематично показаны на рис.4.

**Обсуждение.** Предлагаемое нами определение дивергенции точек векторных полей связано с возможностью использования дискретных геодезических наблюдений векторов смещений только на поверхности изучаемой территории. Необходимое для дальнейших вычислений векторное поле предлагается восстанавливать полиномиальными моделями. Например, пространственное векторное поле для каждой точки с известными координатами  $x, y, z$  и смещениями  $u_x, u_y, u_z$  представляется полиномами вида

$$\left. \begin{aligned} u_x &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6z^2 + a_7xy + a_8xz + a_9yz; \\ u_y &= b_0 + b_1x + b_2y + b_3z + b_4x^2 + b_5y^2 + b_6z^2 + b_7xy + b_8xz + b_9yz; \\ u_z &= c_0 + c_1x + c_2y + c_3z + c_4x^2 + c_5y^2 + c_6z^2 + c_7xy + c_8xz + c_9yz. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Степень полиномов (3), аппроксимирующих векторное поле сдвижений, может быть выбрана исходя из реальной схемы сети геодезического мониторинга, например: на техногенных полигонах в местах разработки полезных ископаемых, а также прогнозных полигонах на сейсмоопасных территориях и в вулканических областях. Для вычисления дивергенции в большинстве случаев достаточно полиномов второй степени.

Далее коэффициенты полиномов  $a, b, c$  вычисляются путем решения общей системы таких полиномов, составленных для всех пунктов наблюдаемой геодезической сети. Полученные уравнения векторного поля позволяют вычислять векторы смещений в любой точке, формировать векторные трубки малого объема и по их входным и выходным сечениям вычислять дивергенцию.

В этом заключается главное положение нашего метода. Рассмотрим его более подробно, включая варианты алгоритмизации. Пусть после двух циклов геодезических наблюдений на некоторой территории найдены значения и направления пространственных смещений. Эти величины являются результатами высокоточного нивелирования и математической и статистической обработки наблюдений глобальными навигационными системами. Полученная картина векторов

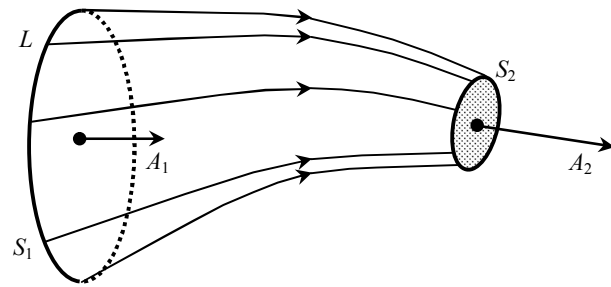


Рис.3. Векторная трубка, ограниченная силовыми линиями, входным сечением  $S_1$  и выходным сечением  $S_2$

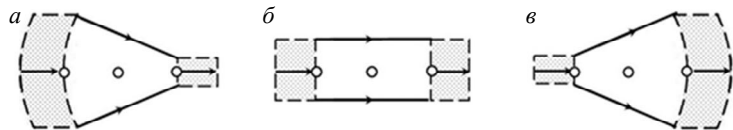


Рис.4. Некоторые варианты дивергенции:  $a - \text{div } F < 0$ ;  $b - \text{div } F = 0$ ;  $c - \text{div } F > 0$

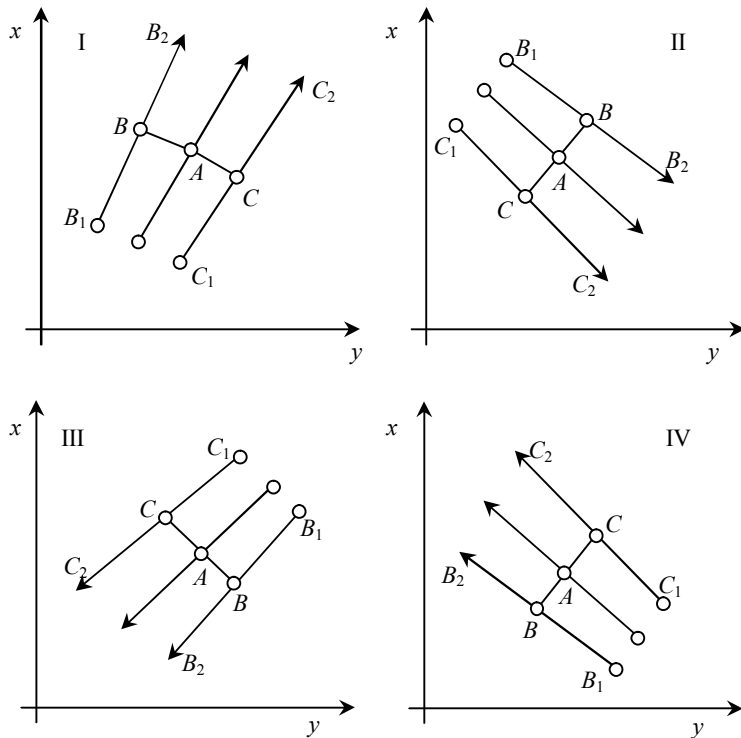


Рис.5. Направления векторов в I-IV четвертях геодезической прямоугольной системы координат

позволяет сформировать векторную трубку в окрестности наблюдаемого геодезического пункта  $A$  (рис.5).

На рис.5 вектор, проходящий через точку  $A(x_A, y_A, z_A)$ , есть результат сравнения координатных определений  $\Delta x_A, \Delta y_A, \Delta z_A$  двух циклов наблюдений (не обязательно соседних по времени). Далее перейдем к реализации нашего алгоритмического предложения. Перпендикулярно (в пространстве) к измеренному вектору по обе стороны от него находим координаты точек  $B$  и  $C$ :

$$\left. \begin{aligned} x_B &= x_A + \frac{\Delta y_A}{100}; & x_C &= x_A - \frac{\Delta y_A}{100}; \\ y_B &= y_A - \frac{\Delta x_A}{100}; & y_C &= y_A + \frac{\Delta x_A}{100}. \end{aligned} \right\} (4)$$

Расстояние, на котором они расположены от точки  $A$ , задается экспертным путем с учетом среднего расстояния между пунктами геодезической сети и для реальных схем техногенных полигонов может составлять несколько метров. В формулах (4), на-

пример, связь расстояния с приращениями координат смещений в 100 раз меньше их среднего значения на исследуемой территории – 1 %.

Зная координаты пунктов  $B$  и  $C$ , по полиномиальным моделям векторного поля (3) вычисляют векторы, через них проходящие. После того как эти векторы стали известны, легко определить координаты их начал  $B_1, C_1$  и концов  $B_2, C_2$ , а по их значениям вычислить компоненты векторов смещений в точке  $B$  ( $\Delta x_B, \Delta y_B, \Delta z_B$ ) и в точке  $C$  ( $\Delta x_C, \Delta y_C, \Delta z_C$ ). Для I четверти (см. рис.3) формулы алгоритма следующие:

$$\left. \begin{aligned} x_{B_1} &= x_B - \frac{\Delta x_B}{2}; & y_{B_1} &= y_B - \frac{\Delta y_B}{2}; & z_{B_1} &= -\frac{\Delta z_B}{2}; \\ x_{B_2} &= x_B + \frac{\Delta x_B}{2}; & y_{B_2} &= y_B + \frac{\Delta y_B}{2}; & z_{B_2} &= \frac{\Delta z_B}{2}; \\ x_{C_1} &= x_C - \frac{\Delta x_C}{2}; & y_{C_1} &= y_C - \frac{\Delta y_C}{2}; & z_{C_1} &= -\frac{\Delta z_C}{2}; \\ x_{C_2} &= x_C + \frac{\Delta x_C}{2}; & y_{C_2} &= y_C + \frac{\Delta y_C}{2}; & z_{C_2} &= \frac{\Delta z_C}{2}. \end{aligned} \right\}$$

Полученные координаты начала и концов векторов  $B$  и  $C$  позволяют вычислить расстояния между ними на входе в векторную трубку  $d_{\text{вх}}$  и выходе из нее  $d_{\text{вых}}$ :

$$\left. \begin{aligned} d_{\text{вх}} &= \sqrt{(x_{B_1} - x_{C_1})^2 + (y_{B_1} - y_{C_1})^2 + (z_{B_1} - z_{C_1})^2}; \\ d_{\text{вых}} &= \sqrt{(x_{B_2} - x_{C_2})^2 + (y_{B_2} - y_{C_2})^2 + (z_{B_2} - z_{C_2})^2}. \end{aligned} \right\}$$

Затем по их значениям можно определить площади выходного сечения  $S_2$  и входного сечения  $S_1$  векторной трубки в предположении, что они являются кругами:



$$S_1 = \pi \left( \frac{d_{\text{вх}}}{2} \right)^2 \quad \text{и} \quad S_2 = \pi \left( \frac{d_{\text{вых}}}{2} \right)^2.$$

Данные о площадях входного, выходного сечений, а также значения векторов сдвижений позволяют оценить дивергенцию векторного поля в выбранной точке координатных определений на поверхности. Нами предлагается следующая упрощенная формула оценки для точки  $A$ :

$$\operatorname{div} A = (S_2 - S_1) \left| \vec{V}_A \right|.$$

**Заключение.** Приповерхностный слой Земли, как и сама планета, являются очень сложными системами. Понимание структурных элементов этих систем, их размеров и иерархии связано с решением обратных задач по наборам некоторых видов геофизических и маркшейдерских наблюдений. Необходимо опираться на результаты прикладной математики, теории упругости, методов математического моделирования [3, 8, 15]. В статье описан метод вычисления дивергенции приповерхностного слоя по результатам дискретных геодезических измерений, проводимых с определенным временным интервалом. В результате оценки распределения дивергенции на исследуемой территории можно получить более объективную картину геодинамического процесса конкретно рассматриваемого МПП и выполнить корректирование параметров среды (граничных условий, механических характеристик и др.), что повысит надежность прогнозных оценок и качество принятия проектно-планировочных решений на горнотехнических предприятиях.

Метод и алгоритм опробованы на реальных данных мониторинговых наблюдений на Таштагольском железорудном месторождении [5], Киембаевском ГОКе и других объектах недропользования.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Аквис М.А. Тензорное исчисление / М.А.Аквис, В.В.Гольдберг. М.: Наука, 1972. 352 с.
2. Воздействие современных геодинамических движений на устойчивость бортов карьеров / А.Д.Сашурин, В.А.Бермухамбетов, А.А.Панжин, С.В.Усанов, В.Е.Боликов // Проблемы недропользования. 2017. № 3 (14). С. 38-43.
3. Гзовский М.В. Математика в геотектонике. М.: Недра, 1971. 240 с.
4. Инновационная технология диагностики геодинамической активности геологической среды и оценки безопасности объектов недропользования / А.Д.Сашурин, А.Е.Балек, А.А.Панжин, С.В.Усанов // Горный журнал. 2017. № 12. С. 16-20.
5. Колмогоров В.Г. Приповерхностные деформации в районе Таштагольского геодинамического полигона / В.Г.Колмогоров, В.А.Калужин // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2015. № 5/С. С. 15-19.
6. Мазуров Б.Т. Модель системы наблюдений за вертикальными движениями земной поверхности и изменениями гравитационного поля в районе действующего вулкана // Изв. вузов. Горный журнал. 2007. № 3. С. 93-99.
7. Мазуров Б.Т. Совместная математическая обработка разнородных комплексных геодезических и геофизических наблюдений // Изв. вузов. Горный журнал. 2007. № 6. С. 30-39.
8. Петухов И.М. Формирование рельефа земной поверхности / И.М.Петухов, В.С.Сидоров, М.Г.Мустафин // Горный информационно-аналитический бюллетень. 2006. № 4. С. 303-309.
9. Проблемные вопросы сдвижения горных пород / М.Г.Мустафин, С.Н.Зеленцов, Е.И.Кузнецова, А.А.Рожко // Записки Горного института. 2010. Т. 185. С. 227-230.
10. Arattano M. Measurements of Debris Flow Velocity through Cross-Correlation of Instrumentation Data / M.Arattano, L.Marchi // Natural Hazards and Earth System Sciences. 2005. Vol. 5. P. 137-142.
11. Biagi Ludovico. Low-Cost GNSS Receivers for Local Monitoring: Experimental Simulation, and Analysis of Displacements / Ludovico Biagi, Florin Calin Grec, Marco Negretti // Sensors. 2016. Vol. 16. P. 21-40.
12. Determination of the stress field in a mountainous granite rock mass / B.Figueiredo, F.H.Cornet, L.Lamas et al. // International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences. 2014. Vol. 72. P. 37-48.
13. Estimation of regional stress state and Young's modulus by back analysis of mining-induced deformation / J.Kodama, T.Miyamoto, S.Kawasaki et al. // International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences. 2013. Vol. 63. P. 1-11.
14. Inaba H. Surface Velocity Computation of Debris Flows by Vector Field Measurements / H.Inaba, Y.Itakura, M.Kasahara // Physics and Chemistry of the Earth. Part B. 2000. Vol. 25. Iss. 9. P. 741-744.
15. Kuzin A.A. Prediction of natural and technogenic negative processes based on the analysis of relief and geological structure / A.A.Kuzin, E.N.Grishchenkova, M.G.Mustafin // Procedia Engineering 2017. Vol. 189. P. 744-751.
16. Millimeter-Accuracy Structural Deformation Monitoring Using Stand-Alone GPS / Yan Bao, Wen Guo, Guoquan Wang et al. // Journal of Surveying Engineering. 2017. Vol. 144. Iss. 1.
17. Mine surface deformation monitoring using modified GPS RTK with surveying rod: initial results / C.Liu, J.X.Gao, X.X.Yu, J.X.Zhang et al. // Survey Review. 2015. Vol. 47. P. 79-86.



18. *Mohtarami E.* Stability analysis of slopes against combined circular-toppling failure / E.Mohtarami, A.Jafari, M.Amini // International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences. 2014. Vol. 67. P. 43-56.
19. Monitoring geodynamic activity in the Victoria Land, East Antarctica: Evidence from GNSS measurements / A.Zanutta, M.Negusini, L.Vittuari et al. // Journal of Geodynamics. 2017. Vol. 110. P. 31-42.
20. *Panzhin A.A.* Satellite geodesy-aided geodynamic monitoring in mineral mining in the Urals / A.A.Panzhin, N.A.Panzhina // Journal of Mining Science. 2012. Vol. 48. N 6. P. 982-989.
21. *Panzhin A.A.* The spatial and temporal geo-dynamic monitoring at the features of subsurface use // Eurasian Mining. 2012. N 1. P. 20-24.
22. *Sainoki A.* Dynamic behavior of mining-induced fault slip / A.Sainoki, H.S.Mitri // International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences. 2014. Vol. 66. P. 19-29.
23. The potential of GPS precise point positioning method for point displacement monitoring: A case study / C.O.Yigit, M.Z.Coskun, H.Yavasoglu et al. // Measurement. 2016. Vol. 91. P. 398-404.

**Авторы:** **Б.Т.Мазуров**, *д-р техн. наук, профессор, btmazurov@mail.ru (Сибирский государственный университет геосистем и технологий, Новосибирск, Россия)*, **М.Г.Мустафин**, *д-р техн. наук, заведующий кафедрой, Mustafin@spmi.ru (Санкт-Петербургский горный университет, Санкт-Петербург, Россия)*, **А.А.Панжин**, *канд. техн. наук, ученый секретарь, panzhin@igdiran.ru (Институт горного дела Уральского отделения РАН, Екатеринбург, Россия)*.

*Статья поступила в редакцию 20.01.2019.*

*Статья принята к публикации 13.03.2019.*