УДК 622:539.3
DOI: 10.33764/2618-981X-2019-2-4-176-181

ЗАДАЧИ КОШИ В ГЕОМЕХАНИКЕ

Валерий Егорович Миренков
Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, 630091, Россия, г. Новосибирск, Красный пр., 54, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории механики горных пород, тел. (383)217-06-93, e-mail: mirenkov@misd.nsc.ru

Предположение о линейном поле напряжений нетронутого горными работами массива пород и необходимость рассчитывать напряженно-деформированное состояние в окрестности выработок при ведении очистных работ привели к созданию аналитических и численных методов расчета. Возникли одномерные, двумерные и трехмерные модели массивов пород с ослаблениями, которые автоматически попадают в класс так называемых задач Коши, для которых формулируются начальные данные Коши. Это связано с тем, что в механике горных пород рассматриваются плоскость с ослаблением или пространство с полостью, для которых существуют бесконечно удаленные точки. Известны решения, когда на бесконечности формулируются граничные условия в виде констант, определяемых исходным полем напряжений принятым для конкретного массива пород. В условиях численного счета программа, как правило, выдает какие-то результаты, точность которых никак не контролировалась. Научные школы во всем мире тиражируют аналогичные результаты, которые находятся в противоречии с теорией уравнений математической физики выделивших для этого класс задач Коши с исчезающими на бесконечности граничными условиями. В работе рассматриваются задачи механики горных пород для плоскости, ослабленной произвольными отверстиями и, доказывается необходимость выполнять положения теории. Предлагается метод решения такого класса задач, основанный на получении так называемого дополнительного решения формулируемого в классе задач Коши.

Ключевые слова: уравнение, напряжения, смещения, задача Коши, решение, корректность.

CAUCHY PROMLEMS IN GEOMECHANICS

Valery E. Mirenkov
Chinakal Institute of Mining SB RAS, 54, Krasny Prospect St., Novosibirsk, 630091, Russia, D. Sc., Professor, Chief Researcher, Rock Mechanics Laboratory, phone: (383)217-06-93, e-mail: mirenkov@misd.nsc.ru

Proposal about linear stress field of virgin solid and necessity for calculation stress-strain behavior near workings at actual mining cause to development analytical and numerical methods of the calculations. One-dimensional, two-dimensional and three-dimensional models of solids with relaxations, which are placed to the class of Couchy problems, for which Cauchy initial data are formulated, has been occurred. It is related to the fact that in rock mechanics plane with relaxation or space with cavity, for which there are infinitely remote points, are considered. There are known solutions, when boundary conditions represented by constants, determined by initial stress field adopted for concrete solid, are formulated on the infinity. In condition of numerical calculation, the software usually gives some result, accuracy of which does not control. Worldwide scientific schools represent same results which are in antimony with theory of equals of mathematical physics, which have outlined class of Cauchy problems for that with cancelled out boundary condition on the infinity. In the work, problems of rock mechanics for the plane relaxed with random holes are considered. The necessity to carry out points of the theory is proved. Method of solving of such problem class based on getting so-called additional solution formulated in class of Cauchy problem is proposed.

Key words: equal, stresses, displacement, Cauchy problem, solution, concreteness.

Введение

В механике существует класс некорректных задач оперирующих, например, бесконечными напряжениями в конечном числе точек. Сюда относятся угловые точки различных областей, априорные предположения на граничные условия (абсолютно твердое тело, идеальное проскальзывание и т.п.). В большинстве случаев при этом получены так называемые аналитические решения задач теории упругости. Проявлено много фантазии при попытке использовать такие решения в проблемах механики при создании теории разрушения материалов и теории трещины. Все это в основном свелось к рассмотрению некорректных задач теории упругости, имеющих бесконечные значения напряжений или смещений, введению понятия сосредоточенной силы, неравенство нулю главного вектора внешних усилий и др. [1-7].

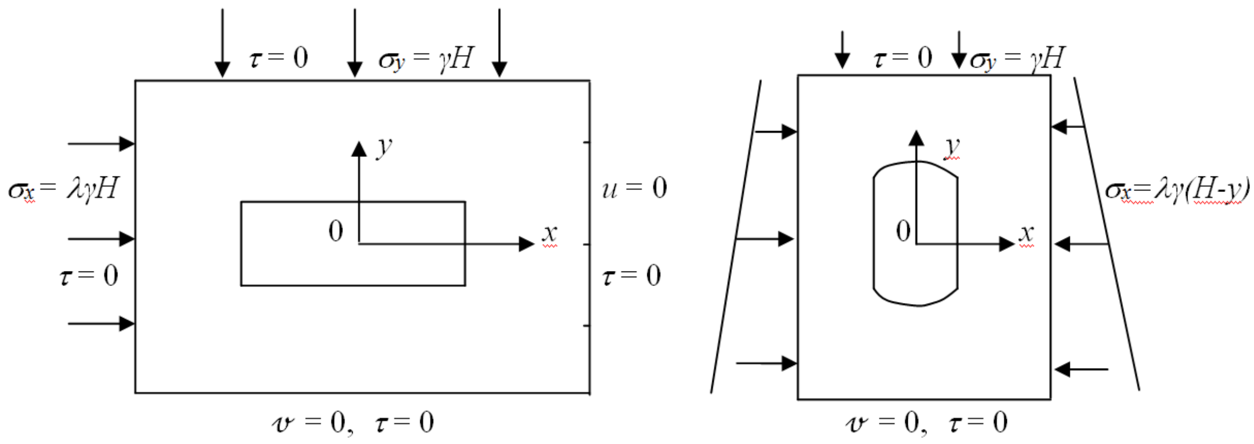
В настоящее время, появление возможности численного счета, например, метода конечных элементов, и число некорректных задач существенно возросло. Для теории упругости имеют место три основных задачи, имеющих множество постановок, которые формулируются со своими конкретными граничными условиями. Эти условия в ряде случаев авторы заменяют произвольно, перебирая их набор, как приложение к программе, что недопустимо.

Примеры некорректных задач

Рассмотрим основные формулировки задач приводящих к некорректным решениям. Обычно стремятся рассчитать поле напряжений в окрестности отверстия, без чего невозможно сделать хоть какие-то рекомендации по практическому использованию. На рис. 1 приведены два вида ослаблений в виде прямоугольника (рис. 1, *а*) и сводчатого контура (рис. 1, *в*), исходное поле напряжений в точке будущей выработки

$$\sigma_y = \gamma H, \quad \sigma_x = \lambda \gamma H, \tag{1}$$

где σ_y, σ_x и τ – нормальные и касательные напряжения в точке проведения будущей выработки, γ – удельный вес пород, H – глубина заложения выработки, λ – боковой распор,v – вертикальная компонента смещений. Аналитического решения этих задач не существует независимо от отсутствия угловых точек (плавный контур) на рис. 1, *б* или их присутствия рис. 1, *а*. Перепад давления компоненты σ_x учитывается только на рис. 1, *б*, что в совокупности с граничными условиями $v = 0$, $\tau = 0$ несовместно, как показано в работе [8]. Объединим оба рис. 1, *а* и 1, *в* в один, убрав изыск, связанный с учетом глубины на рис. 1, *б*, получим обобщающий случай произвольной выработки, приведенный на рис. 2. Общий случай рис. 2, как правило, решается в [1-7] численно, но никого не интересовали смещения в процессе счета. Конечно, первообразной в проблеме деформирования являются смещения, а все остальное представляет производные от смещений того или иного порядка малости. Оценку этого фактора можно провести простым рассуждением. Пусть напряжения σ_x на рис. 2 сжимают участки оси x от точек приложения до контура $Г$ на единицу длины. Если перенести границу счета в два раза дальше от выработки, то участки оси x станут в два раза длиннее. Одна и та же сжимающая сила $\sigma_x = \lambda\gamma H$ деформирует «стержень» в два раза больше, т.е. смещения точки приложения силы с удалением от выработки увеличивают длину отрезка. Поэтому с удалением от выработки смещения неограниченно возрастают, делая проблему, представленную на рис. 2 некорректной. Проведенные рассуждения можно подвергать сомнению, настаивая на отсутствие аналитического решения.



а) *б*)

Рис. 1. Моделирование выработок в массиве пород
и формулировка граничных условий при расчетах

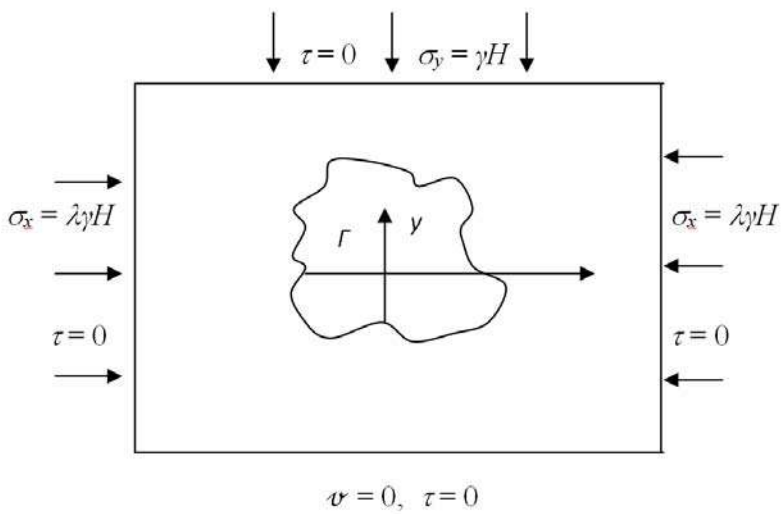


Рис. 2. Выработка с произвольным контуром $Г$

Аналитическое решение, пополняющее класс некорректных задач

Аналитическое решение о плоскости с круговым отверстием (рис. 3) сжимаемой на бесконечности постоянными усилиями приводится в каждом учебнике по теории упругости. Пусть сжимающие усилия действуют вдоль оси x, переходя к безразмерным величинам решение этой задачи в полярных координатах запишем в виде [9]:

$$\sigma_r = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{4}{r^2}+\frac{3}{r^3}\right)\cos 2\theta,$$

$$\sigma_\theta = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{r^2}\right)\cos 2\theta, \qquad (2)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{r^2}-\frac{3}{r^3}\right)\sin 2\theta,$$

определяющем нормальные и касательные напряжения в любой точке плоскости с отверстием;

$$\upsilon_r = \frac{1}{8\mu r}\left[(\kappa-1)r^2 + 2\left(\kappa+1+r^2-\frac{1}{r^2}\right)cos2\theta\right],$$

$$\upsilon_\theta = -\frac{1}{4\mu r}\left(\kappa-1+r^2+\frac{1}{r^2}\right)sin2\theta, \qquad (3)$$

определяющем компоненты смещений, где r, θ - радиальная и угловая координаты полярной системы координат; $\kappa = 3-4\nu$, ν – коэффициент Пуассона, $\mu = E[2(1+\nu)]^{-1}$, E – модуль Юнга.

Решение (2), (3) аналитическое и единственное, но смещения (3) неограниченно возрастают с удалением от отверстия, т.е. использовать это решение в практических целях невозможно. Как предлагается в [8] при реализации задачи Коши необходимо рассмотреть дополнительную задачу. Дополнительная задача получается, если на рис. 1–3 усилия на бесконечности приравнять нулю, а на контур выработки спроектировать поле напряжений нетронутого массива пород с обратным знаком. Для получения полных напряжений необходимо добавить к решению дополнительной задачи исходное поле напряжений. Существенно, что только при таком подходе получаем на свободном контуре выработки нулевые нормальные и касательные напряжения, чем очень широко пользуются на практике, но просто так сказать, что на контуре нулевые напряжения, нет оснований.

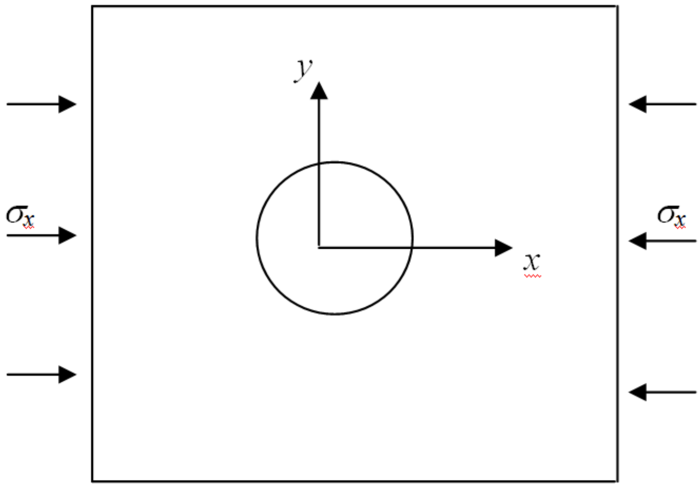


Рис. 3. Плоскость с круговым отверстием,
имеющим аналитическое решение (1), (2)

Заключение

Рассмотрены примеры расчета напряженно-деформированного состояния около выработок методом конечных элементов и доказана их некорректность. Предложено направление получения точного решения.

Приведен пример аналитического решения и определена его некорректность. Такие решения объясняются рассогласованием математического и физического подходов и не имеют ни математического, ни физического смысла.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Babich D.V., Bastun V.N. On dispersed microdamageability of elastic – brittle materials under deformation // J. Strain Analysis. 2010. Vol. 45. № 1. P. 57-66.

2. Чанышев А.И., Абдулин И.М. Определение пластической зоны массива пород в окрестности протяженной цилиндрической выработки по данным измерений смещений на ее границе // ФТПРПИ. – 2016. - № 5. – С. 61-67.

3. Фрейдин А.М., Неверов А.А., Неверов С.А. Геомеханическая оценка комбинированной системы разработки мощных пологих рудных залежей с закладкой и обрушением // ФТПРПИ. – 2016. - № 5. – С. 114-124.

4. Протосеня А.Г., Карасев М.А., Беляков Н.А. Упруго-пластическая задача для выработок различных форм поперечных сечений при условии предельного равновесия Кулона // ФТПРПИ. – 2016. - № 1. – С. 71-81.

5. Линдин Г.Л., Лобанова Т.В. Потоки энергии в задачах о действии штампа на полуплоскость // ФТПРПИ. – 2015. - № 1. – С. 55-68.

6. Carranza-Torres C., Rysdahe B., Kasim M. On the elastic analysis of a circular lined tunnee considering the delayed installation of the support // Int. J. of Rock Mech. And Mining Sciences. – 2013. – Vol. 61. – P. 57-85.

7. BadrulAlam A.K.M., Masaki NiiokaFujii, Daisuke Fukuda, jun-ichi Kodama. Effect of confining pressure on the permeability of three rock types under compression // Int. J. of rock Mech. And Mining Sciences. – 2014. – Vol. 65. – P. 49-61.

8. Миренков В.Е., Красновский А.А. К вопросу учета линейного изменения поля напряжений нетронутого массива с глубиной в задачах геомеханики // ФТПРПИ. – 2014. – № 3. – С. 26-32.
9. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М. : Наука. – 1966. – 708 с.