

ХРУПКОЕ РАЗРУШЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Анвар Исмагилович Чанышев

Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, 630091, Россия, г. Новосибирск, Красный пр., 54, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, тел. (383)335-97-50; Новосибирский государственный университет экономики и управления, 630099, Россия, г. Новосибирск, Каменская, 52, зав. кафедрой математики и естественных наук, e-mail: a.i.chanyshev@gmail.com

Ольга Евгеньевна Белоусова

Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, 630091, Россия, г. Новосибирск, Красный пр., 54, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, тел. (383)335-97-50, e-mail: o.e.belousova@mail.ru

Ольга Анваровна Лукьяшко

Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, 630091, Россия, г. Новосибирск, Красный пр., 54, инженер, тел. (383)335-97-50, e-mail: lykola@yandex.ru

Исследуется напряженно-деформируемое состояние массива пород при плоской деформации в случае его объемной несжимаемости и идеально-хрупком разрушении. Получены характеристики системы дифференциальных уравнений равновесия, соотношения на них. При этом использовалось условие соосности тензоров напряжений и деформаций. Сформулирована граничная задача для определения напряженно-деформированного состояния в зоне разрушения. В качестве примера рассмотрены уравнения идеально-хрупкого предельного деформирования массива пород в виде прямоугольной пластины (целика) при однородном сжатии. Показано, что при слежении за смещением боковой границы пластины возможно предсказать наступление ее разрушения.

Ключевые слова: хрупкое разрушение, напряженное состояние, характеристики, соотношения на характеристиках, граничная задача.

BRITTLE DESTRUCTION OF INCOMPRESSIBLE MATERIAL DURING FLAT STRAIN

Anvar I. Chanyshev

Chinakal Institute of Mining SB RAS, 54, Krasny Prospect St., Novosibirsk, 630091, Russia, D. Sc. Chief Researcher; Novosibirsk State University of Economics and Business Administration, 52, Kamenskaya St., Novosibirsk, 630099, Russia, Head of Department of Mathematics and Natural Sciences, phone: (383)335-97-50, e-mail: a.i.chanyshev@gmail.com

Olga E. Belousova

Chinakal Institute of Mining SB RAS, 54, Krasny Prospect St., Novosibirsk, 630091, Russia, Ph. D., Senior Researcher, phone: (383)335-97-50, e-mail: o.e.belousova@mail.ru

Olga A. Lukyashko

Chinakal Institute of Mining SB RAS, 54, Krasny Prospect St., Novosibirsk, 630091, Russia, Engineer, phone: (383)335-97-50, e-mail: lykola@yandex.ru

In the paper stress-strain behavior of solid during flat strain in case of its volumetric incompressible behavior and ideally brittle destruction is studied. Parameters of the system of differential equations of balance and its correlations are obtained. In this case, condition of stress and strain tensors axially is used. Boundary problem for determination of stress-strain behavior at destruction zone is formulated. As example, equations of ideally brittle out-of-limit deformation of solid in form of rectangular plate (pillar) during uniform compression are considered. It is shown that when displacement of side border of the plate is observed, it is possible to predict its destructions.

Key words: brittle destruction, stress behavior, parameters, correlations of the parameters, boundary problem.

Введение

Диаграмма изменения напряжений с ростом деформаций характеризует изменение сопротивления материала деформированию [1-4]. Если напряжение возрастает, то это означает рост сопротивления, если напряжение падает, то сопротивление материала деформированию падает, то есть происходит его разрушение. Кривая предельного деформирования может быть пологой. Если она представляет собой отрезок вертикальной прямой, то этот факт относится к идеально-хрупкому разрушению [5-11]. Плоская деформация идеально-хрупкого материала с объемной несжимаемостью исследовалась в [8]. Здесь использовалось условие несжимаемости среды и два уравнения совместности деформаций, содержащие производные от компоненты вектора поворота в направлении оси Z . Были получены две характеристики системы дифференциальных уравнений для перемещений и два соотношения на них, связывающие компоненту вектора поворота и угол, задающий главные оси тензора деформаций. В [8] не сформулирована граничная задача, и, кроме того, здесь нет уравнений для определения напряжений. В предлагаемой работе будут рассмотрены вопросы, которые не решались в [8]: будут сформулированы уравнения для определения напряжений и граничная задача для нахождения и напряжений, и деформаций.

Часть 1. Определение напряжений, деформаций при плоской деформации для объемно – несжимаемого идеально-хрупкого разрушаемого материала

Постановка задачи. Пусть рассматривается среда, для которой в прямоугольной декартовой системе координат $xOyz$ выполняются уравнения:

$$\varepsilon_z = 0, \quad \varepsilon_x + \varepsilon_y = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} = \Gamma \cos 2\Omega, \quad \varepsilon_{xy} = \Gamma \sin 2\Omega, \quad \Gamma = \Gamma_p, \quad (2)$$

где Γ_p – значение максимальной касательной деформации

$$\Gamma = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2}$$

при идеально хрупком разрушении на диаграмме $T = T(\Gamma)$, где T – максимальное касательное напряжение (рис. 1).

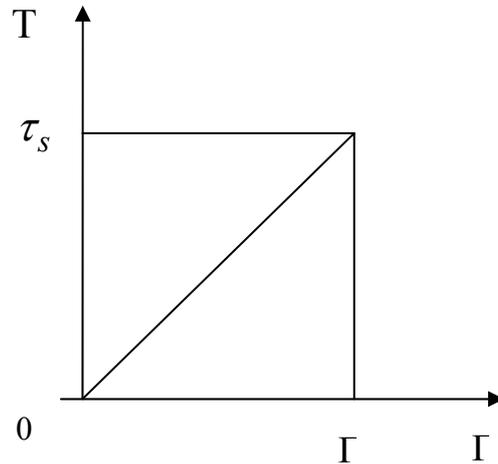


Рис. 1. Диаграмма изменения максимального касательного напряжения T с ростом максимальной касательной деформации (сдвига) Γ

Полагаем, что в процессе деформирования и разрушения среды

$$\operatorname{tg} 2\Omega = \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \quad (3)$$

где θ – угол между первым главным направлением для тензора напряжений T_σ и осью x , Ω – угол между первым главным направлением для тензора деформаций T_ε и осью x . Равенство (3) означает то, что главные оси тензоров T_σ и T_ε совпадают во все время деформирования среды.

Кроме (1)–(3) предлагаем выполнение условий совместности деформаций:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \omega_z}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где ω_z – компонента вектора поворота

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (5)$$

u, v, ω – компоненты вектора перемещений. А также предполагаем выполнение уравнений равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

В [8] соотношения (1), (2) подставлялись в (4). В результате подстановки получались соотношения

$$\begin{cases} 2\Gamma p \left[\sin 2\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \cos 2\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right] = \frac{\partial \omega_z}{\partial y}, \\ 2\Gamma p \left[\sin 2\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \cos 2\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right] = \frac{\partial \omega_z}{\partial x}. \end{cases} \quad (7)$$

Система (7) – гиперболического типа, ее характеристики

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \Omega, \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \Omega. \quad (8)$$

Они, как видно из (8), совпадают по направлению с направлениями главных осей тензора деформаций $T_{\mathcal{E}}$. Соотношения на характеристиках имеют вид [5]:

$$\omega_z - \Omega = \xi \quad \omega_z + \Omega = \eta, \quad (9)$$

где ξ, η – константы.

Для решения задач необходимо знать граничные значения функций $\omega_z = \omega_z(x, y)$, $\Omega = \Omega(x, y)$. С этой целью будем считать, что на границе тела L заданы смещения

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad (10)$$

где координаты $x, y \in L$. Вычисляя полные дифференциалы от u и v , имеем

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

или

$$du = \varepsilon_x dx + (\varepsilon_{xy} - \omega_z) dy, \quad dv = (\varepsilon_{xy} + \omega_z) dx + \varepsilon_y dy. \quad (11)$$

Подставляя в (11) выражения (1), (2), находим

$$\begin{aligned} du &= \Gamma_p \cos 2\Omega dx + (\Gamma_p \sin 2\Omega - \omega_z) dy, \\ dv &= (\Gamma_p \sin 2\Omega + \omega_z) dx - \Gamma_p \cos 2\Omega dy. \end{aligned} \quad (12)$$

Поделив (12) на величину $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, имеем соотношения:

$$\begin{cases} u'_S = -\Gamma_p \cos 2\Omega \sin \varphi + \Gamma_p \sin 2\Omega \cos \varphi - \omega_z \cos \varphi, \\ v'_S = -\Gamma_p \sin 2\Omega \sin \varphi - \Gamma_p \cos 2\Omega \cos \varphi - \omega_z \sin \varphi, \end{cases} \quad (13)$$

где u'_S, v'_S – производные от смещений u, v по касательной к L , а φ – угол между нормалью к границе L и осью x . Из (13) находим

$$\cos 2(\Omega - \varphi) = \frac{(u'_S \sin \varphi - v'_S \cos \varphi)}{\Gamma_p}, \quad \omega_z = -\frac{u'_S \cos(2\Omega - \varphi) + v'_S \sin(2\Omega - \varphi)}{\cos 2(\Omega - \varphi)}. \quad (14)$$

Формулы (14) позволяют определять граничные значения угла Ω и компоненты вектора поворота ω_z . Далее возникает задача: как определить напряженное состояние в области разрушения?

Для определения напряженного состояния имеем соотношения (3), то есть $\theta = \Omega$, и общепринятые зависимости

$$\sigma_x = \sigma + T \cos 2\theta, \quad \sigma_y = \sigma - T \cos 2\theta, \quad \tau_{xy} = T \sin 2\theta, \quad (15)$$

где угол $\theta = \theta(x, y)$ из предыдущего анализа считается известной функцией координат x, y . Подставляя (15) в (6) при известном значении угла $\theta = \theta(x, y)$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} \cos 2\theta + \frac{\partial T}{\partial y} \sin 2\theta = 2T \left[\sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} - \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \right], \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial x} \sin 2\theta - \frac{\partial T}{\partial y} \cos 2\theta = -2T \left[\cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \right]. \end{cases} \quad (16)$$

Здесь правые части (16) с точностью до T считаются известными функциями. Сравнивая (16) с (7), видим, что правые части (16) соответственно равны следующим выражениям

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial y} \frac{T}{\Gamma_p}, \quad -\frac{\partial \omega_z}{\partial x} \frac{T}{\Gamma_p}. \quad (17)$$

Определяя характеристики (16), находим, что они совпадут с (8), где $\theta = \Omega$. При этом соотношения на характеристиках принимают вид:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta, & d\sigma + d\Gamma = \frac{\Gamma}{\Gamma p} \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} dx - \frac{\partial \omega_z}{\partial x} dy \right), \\ \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg}\theta, & d\sigma - d\Gamma = \frac{\Gamma}{\Gamma p} \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} dx - \frac{\partial \omega_z}{\partial x} dy \right). \end{cases} \quad (18)$$

Правые части (18) представляет собой векторное произведение векторов

$$\operatorname{grad} \omega_z = \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial x}, \frac{\partial \omega_z}{\partial y}, 0 \right) \text{ и } \overline{ds} = (dx, dy, 0).$$

Это означает, что при интегрировании соотношений на характеристиках, полученные интегралы будут зависеть от пути интегрирования, так как (18) через векторное произведение связаны с площадями параллелограммов, построенных на векторах $\operatorname{grad} \omega_z, \overline{ds}$.

Возникает вопрос: как найти граничные значения функций $\sigma = \sigma(x, y)$, $\Gamma = \Gamma(x, y)$, входящих в (18)? Для этого имеем вектор напряжений Коши на границе тела L . Его координаты вдоль осей x, y имеют соответственно вид:

$$\begin{cases} p_n^x = (\sigma + \Gamma \cos 2\theta) \cos \varphi + \Gamma \sin 2\theta \sin \varphi, \\ p_n^y = \Gamma \sin 2\theta \cos \varphi + (\sigma - \Gamma \cos 2\theta) \sin \varphi, \end{cases} \quad (19)$$

где φ – угол между нормалью к L и осью x . Из (19) получаем граничные значения

$$\Gamma = \frac{p_n^y \cos \varphi - p_n^x \sin \varphi}{\sin 2(\theta - \varphi)}, \quad \sigma = \frac{p_n^y \sin(2\theta - \varphi) - p_n^x \cos(2\theta - \varphi)}{\sin 2(\theta - \varphi)}. \quad (20)$$

Таким образом, применяя (20) и используя (18), устанавливаем напряженное состояние в области разрушения.

Часть 2. Определение НДС пластины в состоянии запредельного деформирования при сжатии

Данная задача имеет отношение к устойчивости целиков при разработке полезных ископаемых. Она исследовалась во многих работах [12-20].

Как пример приведем уравнения и простейшее решение задачи о предельном деформировании пластины при плоской деформации при однородном сжатии. Пусть в процессе нагружения выполняются условия:

$$\varepsilon_{xy} = \tau_{xy} = 0. \quad (21)$$

Это означает, что углы $\Omega = \theta = 0$, то есть первые главные направления для тензоров T_σ и T_ε совпадают с направлением оси x . Далее, пусть в достигнутом напряженно-деформированном состоянии

$$\varepsilon_x = \Gamma p, \quad \varepsilon_y = -\Gamma p,$$

где Γp – предел прочности (см. рис. 1).

Отсюда находим смещения u, v при условиях $\varepsilon_{xy} = \omega_z = 0$:

$$u = \Gamma p x, \quad v = -\Gamma p y.$$

Напряжение удовлетворяет уравнениям равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0.$$

Тогда

$$\sigma_y = f(x), \quad \sigma_x = \varphi(y),$$

где f, g – заданные функции координат.

Данная ситуация представлена на рис. 2.

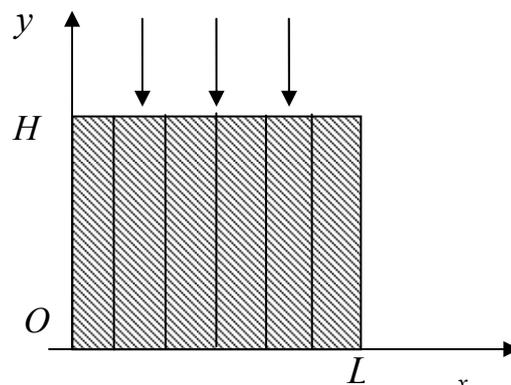


Рис. 2. Пластина высоты H и ширины L сжата в вертикальном направлении усилием $\sigma_y = f(x)$. Характеристиками системы дифференциальных уравнений служат линии $x = const$, $y = const$

Из предыдущих формул и рис. 2 не трудно заметить, что для контроля момента разрушения необходимо следить за изменением бокового смещения u . Как только оно достигнет критического значения $u = \Gamma_p L$, так тут же произойдет разрушение пластины.

Замечание

Из предыдущего анализа не видно: когда величина Γ достигнет значения Γ_p ? Для решения этой задачи следует рассматривать предыдущие решения, например, относящиеся к упругости (см. рис. 1).

Для упругого состояния имеем

$$du = \varepsilon_x dx + (\varepsilon_{xy} - \omega_z) dy, \quad dv = (\varepsilon_{xy} + \omega_z) dx + \varepsilon_y dy.$$

Поделив это выражение на $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, как и прежде, получаем

$$u'_s = -\varepsilon_x \cos \varphi + (\varepsilon_{xy} - \omega_z) \sin \varphi, \quad v'_s = (\varepsilon_{xy} + \omega_z) \cos \varphi + \varepsilon_y \sin \varphi. \quad (22)$$

Эти соотношения дополняются следующими:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2k}, \quad \Gamma = \frac{T}{2\mu}, \quad \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{2\tau_y}{\sigma_x - \sigma_y}, \quad (23)$$

$$p_n^x = \sigma_x \cos \varphi + \tau_{xy} \sin \varphi, \quad p_n^y = \tau_{xy} \cos \varphi + \sigma_y \sin \varphi, \quad (24)$$

(p_n^x, p_n^y – заданные величины на границе L). В результате имеем семь уравнений (22)–(24), для определения семи неизвестных $\varepsilon_x, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_y, \omega_z, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$. Система имеет единственное решение, из которого устанавливается величина Γ .

Выводы

1. Определено напряженно-деформированное состояние в области предельных деформаций при идеально хрупком разрушении объемно несжимаемой среды.

2. Рассмотрено решение задачи об однородном сжатии пластинки в условиях идеально хрупкого разрушения. Показано, что для контроля целика массива горных пород необходимо следить за изменением его смещения в поперечном направлении.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта РФФИ (№ 18-05-00757 А).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Курленя М.В., Афиногенов Ю.А., Жигалкин В.М., Опарин В.Н., Усольцева О.М., Чанышев А.И. Блочная феноменологическая механическая модель элемента деформируемой среды. Часть 2. Динамические эффекты// ФТПРПИ. – 1998. – № 5. – С. 34-49.
2. Чанышев А.И., Белоусова О.Е. Об одной интерпретации зональной дезинтеграции массива горных пород вокруг выработок // Физическая мезомеханика. – 2009. – Т. 12. – № 1. – С. 89-99.
3. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учебник для вузов. – 10-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. – Т. 2. – 592 с.
4. Старовойтов Э. И. Сопротивление материалов. – М.: Физматлит, 2008. – 384с.
5. Никифоровский В.С., Шемякин Е.И. Динамическое разрушение твердых тел. – Новосибирск: Наука, 1979. – 272 с.
6. Шемякин Е.М. Задача о хрупком шарнире// Изд. АН.МТТ. – 1996. – № 2. – С. 138-144.
7. Леонов М.Я., Панасюк В.В. Развитие мельчайших трещин в твердом теле//Прикл. Механика. – 1959. – № 5. –С. 49 – 61.
8. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. –М.: Наука, 1974. – 312 с.
9. Шемякин Е.М. О хрупком разрушении твердых тел (плоская деформация)//Известия Академии наук. Механика твердого тела. – 1997. –№ 2. –С. 145.
10. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, Гл. ред. физ-мат литературы. – 1974. – 640 с.
11. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. Литературы.– 1985. – 504 с.
12. Борисов А.А. Механика горных пород и массивов. – М.: Недра. – 1980. – 360 с.
13. Проскуряков Н.М. Управление состоянием массива горных пород. – М.: Недра, 1991. – 368 с.
14. Шерман Д.И. К вопросу о напряженном состоянии междукамерных целиков. Упругая весомая среда, ослабленная двумя отверстиями эллиптической формы // Известия АН СССР. Отдел технических наук. – 1952. – № 6. – С. 840- 857.
15. Слесарев В.Д. Определение оптимальных размеров целиков различного назначения. – М.: Углетехиздат. – 1948. – 196 с.
16. Руппенейт К.В. Некоторые вопросы механики горных пород. – М.: Углетехиздат, 1954. – 384 с.
17. Нестеров М.П. Об инженерных методах расчета ленточных целиков // Горный журнал. –1968. – № 9.
18. Михлин С.Г. О напряжениях в породе над угольным пластом // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1942. – № 7. – С. 13-28.
19. Динник А.Н. О давлении горных пород и расчет крепи круглой шахты // Инженерный работник. – 1925. – № 7. – С. 15-18.
20. Воробьев А.Н., Прутков С.Н. Метод расчета пролета камер, барьерных и междукамерных целиков на основе теории арочных систем // ГИАБ. – 2006. – № 10. – С. 201-205.

© А. И. Чанышев, О. Е. Белоусова, О. А. Лукьяшко, 2019