Российская академия наук·Уральское отделение
Уральский минералогический сборник, 2000, № 10

Е. П. Макагонов

ВОЗНИКНОВЕНИЕ И РАЗВИТИЕ ИДЕЙ ГОМОЛОГИИ В КРИСТАЛЛОГРАФИИ

E. P. Makagonov

ORIGIN AND DEVELOPMENT OF IDEAS OF A HOMOLOGY IN A CRYSTALLOGRAPHY

Paper contains the review of development and application of ideas of a homology in a crystallography from origin of primary concepts before modern representations. The link of a homology V. I. Miheev is shown with affine geometry. The representations are reduced E. S. Fedorov, C. M. Viola, A. V. Chubnikov, V. I. Miheev, P. A. Zabolotny, A. F. Palistrant, V. V. Nardov etc.

Структурное состояние материальных веществ определяется двумя крайними положениями: порядком и хаосом. В реальном мире идеальный порядок (наиболее равный, наиболее симметричный) также недостижим, как и идеальный хаос, в котором имеется стремление к структурированию, упорядочению вещества. Между этими состояниями — порядком и хаосом — вещество находится в промежуточных состояниях, приближаясь в отдельных случаях к предельной косоугольности, криволинейности, скрученности и другим. Даже для таких высокосимметричных построек как кристаллы симметрия определяется на статистическом уровне. Параллельно с увеличением точности методов определения структур кристаллов все больше кристаллических веществ переводится в низкосимметричные. Неупорядоченность, двойникование и более сложное структурирование на микроблоковом уровне повышает симметрию индивидов до определяемой на макроуровне.

Большинство природных и искусственных кристаллических веществ характеризуется косоугольными координатами, к которым слабо применимы ортогональные группы симметрии. Для более адекватного представления симметрийных свойств косоугольным кристаллам необходима косоугольная симметрия. Такой симметрией является гомология — один из разделов обобщенной симметрии. В гомологии устанавливается однозначное соответствие между исходной фигурой и фигурой, полученной из нее путем однородных деформаций. Сами же однородные деформации-растяжения (сжатия) и сдвиги — относятся к разряду гомологических операций [24].

В свою очередь, линейные (однородные) деформации рассматриваются в рамках аффинной геометрии. В отличие от изометрической евклидовой геометрии, в которой все преобразования рассматриваются в ортогональных координатах, в аффинной геометрии преобразования рассматриваются в косоугольных координатах. При аффинных преобразованиях прямые переводятся в прямые и параллельные прямые переходят в параллельные прямые. Сохраняются и отношения отрезков прямых. Все прямые аффинно эквивалентны. Также аффинно эквивалентны и все треугольники, так как они могут преобразовываться друг в друга с помощью аффинных преобразований. Аффинно эквивалентны и все параллелограммы, все тетраэдры, все параллелепипеды, шар и все эллипсоиды. При гомологических преобразованиях, наряду с общими особенностями аффинных преобразований, не изменяются также площади (объемы) фигур.

Среди аффинных преобразований выделяется сжатие к точке (и растяжение от точки), так называемая гомотетия. В кристаллографии гомотетия вместе с симметрийными операциями составляет предмет симметрии подобия, разработанной А. В. Шубниковым [38]. В целом, видный французский математик Г. Шоке определяет аффинное преобразование как произведение (положительное) гомотетии и косых симметрий [39]. Для дискретных групп любых аффинных преобразований А. М. Заморзаев предложил название «аффинная симметрия» [10]. С использованием аксиом аффинной геометрии для теоретического обоснования гомологических преобразований теория гомологии получает и математически точный фундамент.

Геометрические преобразования сжатия к «прямой» (растяжения от прямой) появились уже в трудах Архимеда и Аполония. Эквиаффинные преобразования, сохраняющие площади (объемы) фигур впервые ввел в науку Сабита ибн Корра в «Книге о сечениях цилиндра и его поверхности» [6]. Значительный вклад внес Л. Эйлер, который и ввел в научный обиход слово «аффинный» (от латинских слов affinis — системный, affinitas — свойство, родство). Им же введены понятия косого отражения и косого растяжения. В 1661 г. Ж. Дезаргом приведено доказательство теории гомологических треугольников. После появления Эрлангенской программы Ф. Клейна в 1872 году аффинная геометрия была признана самостоятельной наукой.

В кристаллографии общее свойство гомологичности используется в объединении в группы сходных фигур. Р. Ж. Гаюи к тетраэдрам относил все четырехсторонники, к тригональным призмам — все пятисторонники, к параллелепипедам — все шестисторонники. Х. С. Вейс и Ф. Моос также использовали гомологические свойства фигур при выделении кристаллографических сингоний [33].

Наиболее полно гомологические свойства олицетворяют ячейки пространственных решеток. В любой решетке можно выделить бесконечное число элементарных ячеек. Деформацией сдвига любую ячейку можно превратить в другую. Одной из главных математических задач исследования решеток было нахождение некоторой единственной однозначно задающейся ячейки и правил, позволяющих перейти от любой ячейки данной решетки к этой единственной, т. е. приведенной ячейки (теория приведения решеток). Эта задача для двумерной решетки в чисто арифметическом виде была рассмотрена Лагранжем в 1768 году в его выдающимся мемуаре о неопределенных уравнениях второй степени с двумя неизвестными. Для трехмерного случая аналогичные вопросы были решены профессором физики во Фрайберге Л. А. Зеебером в 1831 году [5]. Он же и ввел в научный обиход термин «пространственная решетка» в 1824 году.

В 1850 году О. Браве перенес идеи о приведенном параллелепипеде из теории чисел в теорию кристаллографии [5]. Задача приведения в окончательном виде была оформлена член-корреспондентом Академии Наук Б. Н. Делоне, предложившим специальный тетраэдрический символ приведения, который ныне называется символом Делоне [4]. Примечательно, что символ дает возможность в процессе приведения по значениям ребер тетраэдра определить в кристаллических решетках прямые и косые оси гомологии.

Е. С. Федоров в классическом труде «Начала учения о фигурах» ввел в кристаллографию и учение о многогранниках понятие о сдвигах и растяжениях — преобразованиях, известных до этого в механике [28]. Классификация разбиений трехмерного евклидового пространства Е. С. Федорова основывается на выделении четырех типов параллелоэдров: куб и деформированные аналоги (трипараллелоэдры), гексагональные призмы прямые и скошенные (тетрапараллелоэдры), ромбододекаэдры правильные и искаженные (гексапараллелоэдры), комбинации куба и октаэдра правильные и деформированные (гептапараллелоэдры) [31].

В «Курсе кристаллографии», опубликованном в 1901 году, Е. С. Федоров разбирает вопрос о соотношении между симметрией и гомологией, которую он называет «видимой симметрией» [29]. В этой книге Е. С. Федоров выделяет элементы видимой симметрии — оси и плоскости. Основываясь на сходстве с правильными фигурами он замечает, что все параллелограммы обладают четверной осью и четырьмя плоскостями видимой симметрии. Все треугольники также обладают одинаковой видимой симметрией, а именно: вертикальной тройной осью и тремя проходящими через нее плоскостями видимой симметрии.

В 1903 году Е. С. Федоров сформулировал закон кристаллографических пределов, в основе которого лежит федоровская теория кристаллического строения: «Мир кристаллов оказывается не единичным, но резко распадается на два царства, названные типами: кубическим и гексагональным» [30]. По этой теории существуют четыре идеальные решетки: кубические (примитивная, объемноцентрированная, центрогранная) и гексагональная. Все остальные выводятся путем растяжений и сдвигов из этих четырех идеальных решеток. Но и кубические решетки взаимно связаны с гексагональной через промежуточные типы.

Современник Е. С. Федорова горный инженер и преподаватель кристаллографии и минералогии в Римском университете Карло-Мария Виола в 1904 году выпустил в свет книгу «Основы кристаллографии», в которой значительная часть посвящена описанию и характеристике гармоничных свойств кристаллов [40]. Элементы гармонии К. М. Виолы тождественны элементам видимой симметрии Е. С. Федорова. Среди этих элементов выделяются косые плоскости (плоскости гармонии) и эллиптические оси второго, третьего, четвертого и шестого порядков (гармонии, дисгармонии, тригармонии, гексагармонии). К. М. Виола приводит эмпирические правила сложения элементов гармонии, составленные по аналогии с соответствующими правилами сложения элементов симметрии. Здесь же введены понятия о видах гармонии, но сам вывод видов гармонии оказался неполным и в некоторых случаях ошибочным.

А. В. Шубников, рассматривая вопросы расширения симметрии, показал, что асимметричные фигуры будут симметричными, если считать равными фигуры не по всей совокупности свойств, а в каком-либо определенном смысле. Например, будут равны все шесть частей косоугольного треугольника, разделенного тремя медианами, так как они равны по площади. По новому определению медианы треугольника играют роль линий симметрии [34]. В качестве особого симметричного преобразования вводит косое отражение в плоскости, а в качестве нового элемента симметрии косую плоскость симметрии. Там же он определяет и понятие косого поворота вокруг косой оси [35].

В 1947 году вышла знаменитая «Синяя книга» Н. В. Белова «Структура ионных кристаллов и металлических фаз» [1]. При рассмотрении конкретных структур Н. В. Белову пришлось широко использовать деформационные преобразования: растяжение и сжатие полиэдров по определенным направлениям, квадратизацию ромбических сеток и другие искажения структурных мотивов, то есть, говоря другим языком, использовать гомологические преобразования.

Основатель собственно учения о гомологии профессор кафедры кристаллографии Ленинградского горного института Виктор Иванович Михеев. В 1947 году он приступил к разработке вопросов применения идей федоровской новой геометрии в кристаллографии в связи с поиском способов расшифровки дебаеграмм низкосимметричных минералов. Через 2 года статья о федоровских деформациях и элементах симметрии «Новые идеи в учении о симметрии (элементы гомологичности самогомологичных систем)» была доложена на сессии Федоровского института [21]. Автор исследовал влияние сдвигов и растяжений на симметрию, связь гомологических преобразований и элементов гомологичности с симметрическими преобразованиями и элементами симметрии, дал понятие вида гомологичности кристаллов, теоремы сложения элементов гомологичности. Определены понятия самогомологичности фигур, элементов гомологичности. На примере сходства элементарных ячеек сфалерита и халькопирита был показан переход от кубической структуры к тетрагональной с точки зрения гомологических преобразований.

В 1950 году опубликована статья В. И. Михеева, в которой приведено общее число видов гомологичности без учета косых эллиптических осей [19]. В другой статье, было показано, что укладки равных и параллельных друг другу эллипсоидов, имеют такую же плотность, как и плотнейшие шаровые укладки и могут встретиться лишь в 14 кристаллографических видах симметрии [20]. В 1951 году опубликована статья этого же автора «О пространственных группах гомологии» [22].

На основе теории гомологичности В. И. Михеевым разработан эффективный способ индицирования дебаеграмм, полученных от веществ с низкой симметрией. Известно, что целый ряд минералов и кристаллических веществ в природе встречается только в порошковатом виде. Существенную роль в диагностике таких минералов играют рентгеновские исследования, но применяемое при расшифровке рентгенограмм решение системы n уравнений с 3n+3 и большим количеством неизвестных не может привести к однозначному результату и одной квадратичной зависимости недостаточно. Способ В. И. Михеева открыл возможность более правильного решения задач индицирования. В основе этого способа используется закон кристаллографических пределов Е. С. Федорова. Дабаеграммы сравниваются с эталонными, рассчитанными для идеальных федоровских типов. Некоторая деформация структур отражается на дебаеграммах расщеплением линий по сравнению с дебаеграммами кубических и гексагональных веществ [23].

Подробное изложение новой кристаллографической теории опубликовано в монографии «Гомология кристаллов», увидевшей свет через пять лет после кончины автора, в 1961 г. [24]. В этой монографии приводятся данные по истокам учения и истории развития понятий об элементах гомологичности, дано определение этих понятий, сделан вывод о возможности в кристаллах только осей гомологии первого, второго, третьего, четвертого и шестого порядков. Разработаны теоремы о сложении элементов гомологии, сделан полный вывод точечных групп гомологии, снабженный рисунками стереографических проекций. Здесь же показано научно-практическое значение гомологии, описан прием определения видов гомологии кристаллов на конкретных примерах ряда минералов и искусственных кристаллов. В конце монографии введено понятие о пространственных группах гомологии и правильных системах гомологичных фигур, приведен вывод пространственной группы гомологии $P4^{e}mm$ (в символах В. И. Михеева $P\Lambda_4'mm$).

А. В. Шубников в статье «Что такое гомология кристаллов?» дал ясное математическое толкование понятия гомологии и, в частности, показал, что гомология есть свойство фигур преобразовываться в себя уравнениями смены координат точек или матричными преобразованиями, именуемыми аффинорами [37]. Здесь же приведен вывод операций гомологии для фигуры, обладающей группой $4^{h}\mu\mu$ (или $\lambda_4 4\pi$ в символах В. И. Михеева). Показано, что совокупность операций гомологии образует группу в математическом смысле: операции гомологии составляют множество, произведение этих операций принадлежит этому же множеству, для произведения трех операций имеет место ассоциативный закон.

Р. В. Галиулиным в 1969 году дано следующее утверждение (следствие теоремы Машке): для конечной группы H аффинных преобразований фигуры F всегда можно подобрать такое аффинное преобразование σ, после действия которого фигура F переводится в некую $F' = \sigma(F)$, а сама группа H превратится в группу G преобразований симметрии для групп F′ [2]. С этим обстоятельством, как считает Р. В. Галиулин, и связаны группы гомологии В. И. Михеева [3].

Большую работу по выводу кристаллографических групп гомологии провели математики Молдавского государственного университета. Представитель этой школы П. А. Заболотный в 1973 году для вывода групп гомологии использовал обратное утверждение: после действия на фигуру F аффинного преобразования σ она превращается в некоторую группу гомологии H фигуры F′ по закону $H = \sigma G \sigma^{-1}$ [9]. Группа симметрии G называется исходной по отношению к группе гомологии H, если существует такое аффинное преобразование σ, что $H = \sigma G \sigma^{-1}$. При этом группа гомологии называется кристаллографической, если ее исходная группа симметрии G — кристаллографическая. Действие возможных аффинных преобразований на совокупности элементов симметрии фигур рассмотрено на примере деформирования куба в параллелепипеды. Вывод точечных групп гомологии показал, что их количество равно 215, а не 218, как считал В. И. Михеев. В этой же работе П. А. Заболотным введено понятие антигомологии, аналогичное понятию антисимметрии А. В. Шубникова, и приведено число точечных групп антигомологии — всего 432 группы.

В 1974 этот же автор опубликовал вывод 1848 трехмерных пространственных лент [27]. В 1980 году П. А. Заболотным и В. И. Думяну выведены 21 двумерная точечная группа (розетки). Через 6 лет П. А. Заболотный и Л. Ф. Палистрант привели список из 39 двумерных плоскостных групп [27]. Завершающими работами кишиневской школы по выводу кристаллографических групп служат две статьи А. Ф. Палистранта и А. А. Задорожного, опубликованные в журнале «Кристаллография» в 1995 и 1996 годах. В этих работах сделан вывод ленточных групп, 12 бордюров (плоскостных двумерных групп), приводится вывод трехмерных линейных и плоскостных групп (397 стержней и 414 слоев) [30]. В основе их вывода лежит представление о дискретных группах симметрии конечных фигур. Группами гомологии называются дискретные группы H аффинных преобразований этих фигур.

В 1986 году Л. С. Дубровинский и Н. А. Дубровинская [8] вывели 13 двумерных групп гомологии. Они проанализировали их соотношение с группами симметрии и частичной гомологии. Показано было, что использование двумерных групп гомологии при изучении возможных однородных деформаций сеток из тетраэдров позволяет предсказать в слюдах пояс двойникования [001].

Следует отметить, что в литературе термин «гомология» употребляется в разных смыслах. В переводе с греческого языка homologos означает одинаковый, сходный, подобный, равный, соответственный. О. Браве употреблял термин гомологичный в смысле равный. В. И. Михеев, вслед за Е. С. Федоровым, определил термин «гомология» как разновидность проективного преобразования двух систем, между которыми устанавливается однозначное соответствие однородных элементов [24]. Если соответственные элементы двух систем не только однородны, но и равны, то такое преобразование называется *симметрией*. К гомологическим преобразованиям по Е. С. Федорову и В. И. Михееву относятся сдвиги и растяжения, но эти преобразования не относятся к элементам гомологии, под которыми В. И. Михеев понимал геометрические образы, посредством которых совершаются гомологические преобразования самогомологичных систем. Таким образом, выделяются гомологические системы, между которыми взаимно однозначные соответствия определяются через сдвиги и растяжения, и самогомологичные системы, между которыми взаимное однозначное соответствие определяется через преобразования элементов гомологии (плоскостей, осей, центра инверсии). Исходя из идеи общегомологического равенства, В. И. Михеев к гомологии отнес и криволинейную симметрию Д. В. Наливкина. В целом по В. И. Михееву гомология отождествлялась с обобщенной симметрией, но вывод конкретных групп, сделанный В. И. Михеевым, содержит только те, которые образуются при аффинных преобразованиях.

По П. Л. Дубову, В. А. Франк-Каменецкому, И. И. Шафрановскому гомология — одна из разновидностей обобщенной симметрии, которая основывается на аффинных преобразованиях, сохраняющих площади (объемы) между элементами фигур [7].

Более широко понимается гомология в представлениях В. В. Нардова [29]. В основе гомологии этого автора лежит понятие одинаковости. В. В. Нардов заметил, что при выводе пространственных групп симметрии не было учтено, что наименьшие частицы, отражающие химический состав вещества, в кристаллических структурах могут быть неравными. В частности, атомы углерода в графите образуют две неравные взаимопроникающие правильные системы. В ромбической сере таких систем четыре. Геометрические образы, характеризующие взаимное расположение одинаковых частиц с учетом их неравенства, называются элементами одинаковости или элементами гомологии [26]. В более ранней работе такие элементы были названы «элементами самосовмещения» [25].

Среди гомологических преобразований по В. В. Нардову различаются симметрические, деформационные (сдвиги, сжатия и растяжения), гомологические (комбинации симметрических и деформационных преобразований) и преобразования, повышающие кратность систем: косые трансляции (перенос и деформация), центры гомологии (инверсия и деформация), дважды косые оси, простые и косые разорванные оси (рис. 8). Последние можно назвать ступенчатыми осями. Вращение вокруг этих осей можно представить технически как вращение участков осей, соединенных между собой ступенчатыми «ременными» передачами. Действие двух (или нескольких) косых трансляций по В. В. Нардову равносильно действию трансляции в обычном симметрийном понимании этого слова. Опубликована только часть пространственных групп гомологии, относящихся к триклинной и моноклинной сингониям. Разработка этой теории остановилась из-за безвременной кончины ее автора В. В. Нардова — доцента кафедры кристаллографии ЛГУ.

Термином «гомология» широко пользовался К. И. Чепижный. В основе его гомологии лежат наблюдения по искажению кристаллов при микроблоковом росте. Наряду с гомологическими преобразованиями по В. И. Михееву (автодеформационные преобразования), К. И. Чепижный включает и преобразования по Р. Ж. Гаюи, т. е. получение разных форм кристаллов из первичных минеральных ядер [32].

Еще одно направление гомологии названо структурной гомологией. Исходным понятием этой разновидности гомологии, по-видимому, служили понятия, заимствованные из органической химии и примененные к группам родственных соединений, т. е. соединений с одинаковыми химическими функциями и однотипной структурой. Такие группы называются гомологическими рядами (впервые четко сформулированные Ш. Жераром в 1844—1845 годах), среди которых различаются ряды по принадлежности к определенным типам структур, по эволюционной последовательности усложнения структур, по принципам сочленения элементов структур (например, изологические ряды кремнекислородных радикалов) и т. д. На разработке этого направления строится современная практическая структурная кристаллография.

Фундаментом видимой симметрии Е. С. Федорова, гармонии К. Виолы, косой симметрии А. В. Шубникова, гомологии В. И. Михеева и других служит закон сохранения симметрии, который в данном случае может звучать следующим образом: при однородных деформациях фигур элементы симметрии не пропадают, а переходят в элементы гомологии.

Наглядным примером изменения симметрии может служить образование двойников скольжения при механическом двойниковании кристаллов. Нами в статье «Изменение симметрии при деформациях минералов скольжением с перегибом плоскостей скольжения», опубликованной в 1978 г., было показано, что механические двойники могут образовываться в кристалле при сдвижении части его, если исходный кристалл обладает элементами гомологии [12]. При скольжении части кристаллов по направлениям параллельным либо элементам гомологии, либо лучам проекции этих элементов, деформируемая часть кристалла проходит через промежуточное состояние, в котором элементы гомологии переходят в элементы симметрии, а затем снова в элементы гомологии. В конечном результате образующиеся двойниковые элементы симметрии будут параллельны элементам симметрии, возникающим в промежуточном состоянии.

Здесь же, впервые в научной литературе, были показаны элементы гомологии в конкретных кристаллических структурах: сфалерите, антимоните, металлах с объемноцентрированной структурой. Исходя из выведенных правил преобразования элементов симметрии были критически пересмотрены известные схемы механического двойникования для минералов и разработаны новые схемы для широкого круга минералов [11].

В 1980 году нами предложены новые обозначения групп гомологии, сконструированные по типу международных символов групп симметрии и приведены списки точечных групп гомологии в новых символах [13]. В 1990 г. в Сыктывкаре, на конференции по минералогической кристаллографии, кристаллогенезису и кристаллосинтезу был прочитан доклад, в котором были изложены наглядные способы вывода любых групп гомологии, включая некристаллографические [14]. В монографии «Симметрия сростков минеральных индивидов», изданной в 1991 году, в главе «Группы гомологии» приведены общие символы любых точечных групп гомологии, применимые не только для обозначений кристаллографических групп, но и для некристаллографических. В частности, впервые был опубликован полный список аксиальных групп гомологии икосаэдрической гомологии, состоящий из 22 групп, полный список точечных предельных групп гомологии [15]. В этой же монографии приведено распределение пространственных групп гомологии по классам симметрийно-эквивалентных групп. При этом подтвердилось ранее найденное кишиневскими учеными общее количество пространственных групп гомологии, т. е. 1848 единиц. Здесь же впервые в опубликованной литературе приведено число слоевых групп гомологии — 415 (одна группа в списке оказалась лишней).

На международной конференции «Закономерности эволюции земной коры» в Санкт-Петербурге был прочитан доклад «Типы пространственных гомологических решеток» [16]. Расширенная статья на эту тему опубликована в 1997 году [18]. Разработанная символика позволила в компактном виде опубликовать и таблицы, содержащие полные списки пространственных и точечных групп гомологии [17]. Для стержневых групп приводится количество 436. Это число отличается от количества собственно стержневых групп гомологии, равного 397, из-за включения дополнительных групп, отличающихся кристаллографической ориентировкой. Например, в список входят группы p4µm, p4mµ, неразличимые геометрически, но отличающиеся расположением плоскостей: параллельные и диагональные по отношению к кристаллографическим осям. В настоящее время проводится работа по установлению групп гомологии конкретных кристаллических структур, установлению типов гомологических преобразований минералов при фазовых переходах, полиморфных превращениях, однородных деформациях.

Работа сделана при финансовой поддержке РФФИ (проект 96-05-65789).

Литература

1. *Белов Н. В.* Структура ионных кристаллов и металлических фаз. М.: АН СССР, 1947. 238 с.

2. *Галиулин Р. В.* Матрично-векторный способ вывода федоровских групп. М.: ВИНИТИ, 1969. 99 с.

3. *Галиулин Р. В.* Кристаллографическая геометрия. М.: Наука. 1984. 136 с.

4. *Делоне Б. Н., Александров А. Д., Падуров Н. Н.* Математические основы структурного анализа кристаллов. М.: ОНТИ ГТТИ, 1934.

5. *Делоне Б. Н., Галиулин Р. В., Штогрин М. И.* Теория Браве и ее обобщения на n-мерные решетки // О. Браве. Избранные научные труды. Кристаллографические этюды. Л.: Наука, 1974. С. 309 — 415.

6. *Дубов П. Л.* Геометрия и симметрия в трудах А. В. Шубникова // Алексей Васильевич Шубников. Л.: Наука, 1984. С. 55—94.

7. *Дубов П. Л., Франк-Каменецкий В. А., Шафрановский И. И.* Обобщенная симметрия (учебное пособие). Л.: ЛГУ, 1985. 76 с.

8. *Дубровинский Л. С., Дубровинская Н. А.* Двумерные группы гомологии. Приложение к сеткам из тетраэдров // Материалы 13 Науч. конф. аспирантов и мол. ученых геол. фак. МГУ. М., 1987. С. 96—104.

9. *Заболотный П. А.* О группах гомологии и антигомологии // Кристаллография. 1973. Т. 18, вып. 1. С. 5—10.

10. *Заморзаев А. М.* Развитие новых идей в федоровском учении о симметрии за последние десятилетия // Идеи Е. С. Федорова в современной кристаллографии и минералогии. Л.: Наука, 1974. С. 42.

11. *Макагонов Е. П.* Схемы деформации минералов скольжением с перегибом плоскостей скольжения // Исследования по минералогии и геохимии Урала. Тр. Ильменск. заповедн., вып. 16. Свердловск, 1978. С. 23—29.

12. *Макагонов Е. П.* Изменение симметрии минералов при деформации скольжением с перегибом плоскостей скольжения // Исследования по минералогии и геохимии Урала. Тр. Ильменск. заповедн., вып. 16. Свердловск, 1978. С. 35—51.

13. *Макагонов Е. П.* О номенклатуре кристаллографических групп гомологии // Минералогические исследования гидротермалитов Урала. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1980. С. 94—102.

14. *Макагонов Е. П.* Наглядный способ вывода Михеевских групп гомологии // Минералогическая кристаллография, кристаллогенезис, кристаллосинтез (информ. материалы). Сыктывкар, УрО АН СССР, 1990. С. 9 — 10.

15. *Макагонов Е. П.* Симметрия сростков минеральных индивидов. М.: Наука, 1991. 195 с.

16. *Макагонов Е. П.* Типы пространственных гомологических решеток // Закономерности эволюции земной коры. Тез. докл. международн. конференции «Закономерности эволюции земной коры», т. 2. СПб: СПбГУ, 1996. С. 272.

17. *Макагонов Е. П.* Таблицы кристаллографических точечных и пространственных групп гомологии // Уральский минералогический сборник № 6. Миасс: ИМин УрО РАН, 1996. С. 26—44.

18. *Макагонов Е. П.* Типы пространственных гомологических решеток // Уральский минералогический сборник № 7. Миасс: ИМин УрО РАН, 1997. С. 250—263.

19. *Михеев В. И.* Число видов гомологичности кристаллов // Докл. АН СССР. 1950. Т. 71. № 4. С. 667—670.

20. *Михеев В. И.* Низкосимметричные плотнейшие упаковки структурных единиц // Зап. Всесоюзн. мин. общ. 1950. Т. 79. № 3. С. 161—177.

21. *Михеев В. И.* Новые идеи в учении о симметрии (элементы гомологичности самогомологичных систем) // Кристаллография. Труды Федоровской научной сессии 1949 г. Металлургиздат, 1951. С. 49—108.

22. *Михеев В. И.* О пространственных группах гомологии // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77. № 5. С. 807—810.

23. *Михеев В. И.* Рентгенометрический определитель минералов. М.: Госгеолтехиздат. 1957. 868 с.

24. *Михеев В. И.* Гомология кристаллов. Л.: Гостоптехиздат, 1961. 208 с.

25. *Нардов В. В.* Элементы самосовмещения // Труды Федоровской научной сессии. 1953 г. Л., 1955. С. 155—158.

26. *Нардов В. В.* Кристаллографические системы фигур и пространственные группы гомологии (низшая категория сингоний) // Вопросы генетической и структурной кристаллографии. Тр. Ленингр. общ. естествоиспытателей. Т. 75. Вып. 2. 1979. С. 25 — 71.

27. *Палистрант А. Ф., Задорожный А. А.* Стержневые и слоевые группы гомологии // Кристаллография. 1996. Т. 40. № 3. С. 389 — 394.

28. *Федоров Е. С.* Начала учения о фигурах // Зап. минерал. об-ва, 1885.Ч. 21. С. 1—277. (Федоров Е. С. Начала учения о фигурах. Серия Классики науки. М., Л.: АН СССР, 1953. 412 с.)

29. *Федоров Е. С.* Курс кристаллографии. СПб., 1901. 438 с.

30. *Федоров Е. С.* Критический пересмотр кристаллов минерального царства // Зап. Акад. наук по физ. -мат. отд., 1903. Т. 14. № 2. 148 с.

31. *Федоров Е. С.* Правильное деление плоскости и пространства. Серия Классики науки. Л.: Наука, 1979. 272 с.

32. *Чепижный К. И.* Горизонты гомологической минералогии // Н. П. Юшкин, И. И. Шафрановский, К. П. Янулов. Законы симметрии в минералогии. Л.: Наука 1987. С. 288—289.

33. *Шафрановский И. И.* История кристаллографии (с древних времен до начала XIX столетия). Л.: Наука, 1978. 297 с.

34. *Шубников А. В.* Диссимметрия // Вопросы минералогии, геохимии и петрографии. АН СССР, 1946. С. 128—163.

35. *Шубников А. В.* Тетратоэдрия Л. Пастера // Тр. Ин-та кристаллографии. АН СССР, 1948. Вып. 4. С. 1.

36. *Шубников А. В.* Перспективы развития учения о симметрии // Кристаллография. Тр. Федоровской научной сессии 1949 г. Металлургиздат, 1951. С. 33—47.

37. *Шубников А. В.* Что такое гомология кристаллов? // Труды Ин-та кристаллографии АН СССР, 1954. Вып. 9. С. 35 — 42.

38. *Шубников А. В.* Симметрия подобия // Кристаллография, 1960. Т. 5. Вып. 4. С. 489.

39. *Шоке Г.* Геометрия. М.: Мир, 1970. 240 с.

40. *Viola C. M.* Grundzuge der Kristallographie. Leipzig. 1904.