время технология поисков и разведки углеводородов, разрабатываемая авторами десятки лет, перестанет быть уникальной и российские нефтяные компании будут широко использовать новую эффективную западную технологию, основанную на изучении сейсмической неупругости среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рапопорт М.Б., Рапопорт Л.И., Рыжков В.И. Эффект сейсмической неупругости залежей углеводородов и его использование при поисках, разведке и эксплуатации нефтегазовых месторождений // Геология, геофизика и разработка нефтяных месторождений. — 1997. — № 8. — С. 19—23.*
2. *Рапопорт М.Б., Рапопорт Л.И., Рыжков В.И. Поглощение и дисперсия скорости сейсмических волн в залежах углеводородов // Тез. докл. Второй Междунар. конф. SEG. — М., 1993.*
3. *Рапопорт М.Б., Рапопорт Л.И., Рыжков В.И. О влиянии залежей углеводородов на сейсмическое волновое поле // XII Губкинские чтения. — М., 1995.*
4. *Rapoport M.B., Rapoport L.I., Ryjkov V.I. Usage of seismic waves absorption method in exploration of hydrocarbons: Abstract of papers,54 EAEG Meeting, Paris. — 1992.*
5. *Rapoport M.B., Rapoport L.I., Ryjkov V.I., Parnikel V.E., Kately V.A. Method AVD (Absorption and Velocity Dispersion): Testing and Using on the oil deposit in Western Siberia, Abstract of papers,56 EAEG Meeting,Vena. — 1994.*
6. *Ryjkov V.I., Rapoport M.B. Study of a seismic inelasticity from VSP: Abstract of papers,56 EAEG Meeting,Vena. — 1994.*
7. *Rapoport M.B., Ryjkov V.I. Seismic velocity dispersion: An indicator of hydrocarbons: Abstracts of papers,64 SEG Meeting,Los Angeles. — 1994.*
8. *Rapoport M.B., Ryjkov V.I., Rapoport L.I., Girshgorn L.Sh. etc. Interpretation of seismic inelasticity effects in oil and gas prospecting., 65th Ann. Internat. Mtg., SEG. — 1995.*
9. *Rapoport M.B., Ryjkov V.I., Rapoport L.I., Parnikel V.E., Kateli V.A., Binkin I.G. The oil prospecting using seismic attributes as predictors of reservoir properties and fluid saturation. — 67th Ann. Internat. Mtg., SEG. — 1997.*
10. *Q Project. First Break. — 2001. — № 3.*

РАЗРАБОТКА

УДК 622.276.038:532.5

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ ВЯЗКОПЛАСТИЧНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В АНИЗОТРОПНЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

В. М. Максимов, Н. М. Дмитриев
(ИПНГ РАН)

Выведены все возможные варианты соотношений, описывающих фильтрацию ВПЖ в анизотропных пористых средах. Сформулированы условия начала течения. Показано, что закон фильтрации ВПЖ допускает одно-, двух и трехмерные формулировки уравнений течения.

It's deduced all possible variants of relations describing VPF flow in anisotropic porous media. The flow onset conditions are formulated. It was shown that flow laws for viscoplastic fluids admits one-, two- and three-dimensional formulations.

Для нефтегазовой отрасли, наряду с задачами течения вязкопластичных жидкостей (ВПЖ) в трубах, большой интерес представляют задачи фильтрационного течения ВПЖ. Для изотропных пористых сред фильтрационные течения ВПЖ описываются законом фильтрации с предельным (начальным) градиентом и достаточно хорошо изучены [1, 2]. Однако реальные пористые среды, как правило, обладают анизотропией фильтрационных свойств. Фильтрация ВПЖ в анизотропных пористых средах практически не изучена из-за отсутствия экспериментальных данных, которые в свою очередь невозможно получить из-за отсутствия теоретических основ: законов фильтрации, условий начала течения и т. д. Результаты отдельных работ, в которых рассматривались частные типы анизотропии, не дают возможности сформулировать общие принципы и проанализировать возможные эффекты, проявление которых обусловливается вязкопластичными свойствами неньютоновской жидкости. Вместе с тем применение методов кристаллофизики и теории нелинейных тензорных функций [3—5], позволяет дать методы построения определяющих уравнений теории фильтрации ВПЖ в анизотропных пористых средах. Анализ законов фильтрации для ВПЖ в трансверсально-изотропных и ортотропных пористых средах показал, что при построении определяющих уравнений необходимо различать тензоры коэффициентов проницаемости и предельных градиентов, которые могут обладать различной симметрией фильтрационных свойств, и что закон фильтрации многовариантен и допускает одно-, двух- и трехмерные фильтрационные течения.

1. Для количественного описания фильтрационного течения ВПЖ воспользуемся стандартной идеализированной моделью, в которой пористая среда представляется в виде периодической решетки, образованной взаимно перпендикулярными цилиндрическими капиллярами [6, 7]. Каждую систему капилляров наделим своим диаметром (d_α) и периодом укладки (a_α), α = 1,2,3. При построении определяющих уравнений в идеализированных

моделях обычно полагают, что взаимодействием потоков в каналах можно пренебречь [8]. В этом случае можно записать выражения для определения компонент вектора истинной скорости для каждой системы каналов. При построении закона Дарси для идеальных и трещиноватых грунтов используют формулы Пуазейля и Буссинеска, соответственно. Очевидно, что при определении выражения для вектора истинной скорости фильтрации в случае фильтрации ВПЖ можно воспользоваться формулой Бэкингема:

$$V = \frac{d^2 \Delta p}{32\mu_0 L}\left[1 - \frac{4}{3}\left(\frac{4\tau_0 L}{d\Delta p}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{4\tau_0 L}{d\Delta p}\right)^4\right], \tag{1.1}$$

где V — средняя скорость, Δp — перепад давлений в капилляре на участке длиной L, d — диаметр капилляра, μ_0 — пластическая или структурная вязкость, τ_0— начальное напряжение сдвига.

Формула (1.1) определяет "истинную" среднюю скорость при приложении градиента давления вдоль оси симметрии капилляра. В подземной гидромеханике обычно пользуются приближенной формулой (1.1), в которой пренебрегают последним слагаемым в квадратных скобках. Чтобы перейти от истинной скорости к скорости фильтрации, необходимо "размазать" расход по всей грани элементарной ячейки. В результате такого преобразования приближенной формулы получим

$$w^\alpha = \frac{\pi d_\alpha^4}{128\mu_0 a_\beta a_\gamma}\left[1 - \frac{4}{3}\left(\frac{4\tau_0 L}{d_\alpha \Delta p}\right)\right]\frac{\Delta p}{L}, \tag{1.2}$$

Здесь w^α — скорость фильтрации при течении вдоль оси с номером α декартовой системы координат; a_β и a_γ — периоды укладки системы капилляров вдоль соответствующих осей системы координат. Индексы α, β, γ здесь и далее образуют циклическую перестановку из чисел 1,2,3. Соотношение (1.2) определяет скорость фильтрации в α системе капилляров в случае, когда направление градиента давления совпадает с направлением оси симметрии капилляра. В общем случае необходимо рассмотреть модельную задачу о фильтрации ВПЖ в одной системе капилляров [5]. Тогда соотношение (1.2) примет вид:

$$w_i^\alpha = -\frac{k_\alpha}{\mu_0} l_i^\alpha l_j^\alpha \nabla_j p + \frac{k_\alpha \gamma_\alpha}{\mu_0} l_i^\alpha l_j^\alpha \frac{\nabla_j p}{\left|l_j^\alpha \nabla_j p\right|}, \tag{1.3}$$

где l_j^α — орт, задающий направление оси симметрии α-й системы капилляров и совпадающий с направлением вектора скорости фильтрации, $\left|l_j^\alpha \nabla_j p\right|$ — модуль скалярного произведения орта и градиента давления, $\gamma_\alpha = 4\tau_0/d_\alpha$ — значение предельного градиента для α-й системы капилляров; $k_\alpha = \pi d_\alpha^4 / 128 a_\beta a_\gamma$ — проницаемость; греческие индексы, как правило, обозначают номер системы каналов, а латинские — компоненты векторов и тензоров, по повторяющимся латинским индексам подразумевается суммирование, по повторяющимся греческим индексам суммирование, при необходимости, обозначается обычным образом — с помощью знака суммы. Используя допущение о независимости потоков в капиллярах, можно просуммировать соотношение (1.3) для всех систем капилляров и перейти к трехмерному уравнению фильтрации ВПЖ:

$$w_i = -\frac{1}{\mu_0}\left[k_1 l_i^1 l_j^1 + k_2 l_i^2 l_j^2 + k_3 l_i^3 l_j^3\right]\nabla_j p + \frac{1}{\mu_0}\sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha \gamma_\alpha l_i^\alpha l_j^\alpha \frac{\nabla_j p}{\left|l_n^\alpha \nabla_n p\right|}. \tag{1.4}$$

Проанализируем полученное соотношение (1.4). Решетка, образованная тремя взаимно перпендикулярными системами капилляров, в зависимости от геометрических параметров d_α, a_α может обладать симметрией классов кубической или ромбической сингонии [3]. При $d_1 = d_2 = d_3$ и $a_1 = a_2 = a_3$ имеем решетку с кубической симметрией, во всех остальных случаях — с ромбической. Для кубической симметрии соотношение (1.4) принимает вид:

$$w_i = -\frac{k}{\mu_0}\delta_{ij}\nabla_j p + \frac{k}{\mu_0}\gamma\sum_{\alpha=1}^{3} l_i^\alpha l_j^\alpha \frac{\nabla_j p}{\left|l_n^\alpha \nabla_n p\right|}, \tag{1.5}$$

где δ_{ij} — дельта Кронекера. Согласно принципу Неймана [3] для сред с кубической симметрией материальные тензоры второго ранга изотропные, а для ромбической симметрии задаются и определяются тензором вида $D_{(2h)ij} = \sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha b_i^\alpha b_j^\alpha$ [4], где b_i^α — орты, задающие главные направления. Поэтому сравним полученное соотношение (1.5) с уравнением фильтрации ВПЖ в изотропной пористой среде. Обычно закон фильтрации ВПЖ в изотропной пористой среде записывается в виде

$$w_i = -\frac{k}{\mu_0}\left(1 - \frac{\gamma}{|\nabla p|}\right)\nabla_i p, \tag{1.6}$$

где $|\nabla p|$ — модуль градиента фильтрационного давления.

Однако нетрудно заметить, что отношение $\nabla p_i/|\nabla p|$ равно единичному вектору, направленному вдоль приложения воздействия. Поэтому равенство (1.6) можно представить и в другом виде:

$$w_i = -\frac{k}{\mu_0}\delta_{ij}\nabla_j p + \frac{k}{\mu_0}\gamma\delta_{ij}n_i, \tag{1.7}$$

где n_i — орт, который задает направление воздействия: $\nabla_i p = |\nabla p| n_i$. Соотношения (1.6) и (1.7), несмотря на свою математическую эквивалентность, допускают различные физические интерпретации. Соотношение (1.6) обычно рассматривается как нелинейное уравнение фильтрации, в котором выражение $k\left(1-\gamma/|\nabla p|\right)$ задает нелинейную проницаемость. Соотношение (1.7) можно рассматривать как сумму, содержащую два тензора — тензора коэффициентов проницаемости ($k_{ij} = k\delta_{ij}$) и тензора коэффициентов предельных (начальных) градиентов ($t_{ij} = k\gamma\delta_{ij}$). Представление (1.7) оказывается более общим, так как допускает возможную независимость симметрии свойств, задаваемых тензорами k_{ij} и t_{ij}. Как следует из модельного представления (1.3), возможна ситуация, когда при $d_1 \neq d_2 \neq d_3$ среда проявляет изотропные свойства при фильтрации ньютоновской жидкости [6]. Но в уравнении фильтрации ВПЖ при изотропном тензоре k_{ij} будем иметь ортотропный тензор t_{ij}. В самом деле, тензор коэффициентов проницаемости (k_{ij}) представляется в виде композиции двух параметров — коэффициента формы ($d_\alpha^2/32$) и коэффициента просветности ($\pi d_\alpha^2/4a_\beta a_\gamma$), а тензор предельных градиентов записывается уже в виде композиции трех параметров — коэффициента формы, коэффициента просветности и коэффициента $4\tau_0/d_\alpha$, являющегося предельным градиентом. Следовательно, при изотропном тензоре коэффициентов проницаемости получим отротропный тензор предельных градиентов. Поэтому в общем случае необходимо положить, что при фильтрации ВПЖ в пористых средах уравнение фильтрации имеет вид:

$$w_i = -\frac{1}{\mu_0}k_{ij}\nabla_j p + \frac{1}{\mu_0}t_{ij}n_j. \tag{1.8}$$

Вернемся к соотношению (1.4). Учитывая, что $\nabla_i p = |\nabla p| n_i$, перепишем его в виде

$$w_i = -\frac{k}{\mu_0}\delta_{ij}\nabla_j p + \frac{k}{\mu_0}\gamma\sum_{\alpha=1}^{3} l_i^\alpha \operatorname{sgn}\,(n_j l_j^\alpha). \tag{1.9}$$

Далее рассмотрим соотношения (1.8) и (1.9). Их сравнение показывает, что в равенстве (1.8) значение предельного градиента задается вдоль любого направления с помощью тензора второго ранга, а в равенстве (1.9) предельный градиент определяется как сумма предельных градиентов вдоль главных направлений тензора коэффициентов проницаемости. В обоих случаях значение предельного градиента не зависит от градиента фильтрационного давления. Таким образом, в уравнении (1.8) предельный градиент может изменяться и определяется и задается непрерывно для любого направления, а в равенстве (1.9) предельный градиент представляется постоянным вектором в каждом квадранте декартовой системы координат. Понятно, что для континуальной модели более естественно представление (1.8). Более того, в приведенных рассуждениях физические свойства (проницаемость, предельный градиент) в уравнении фильтрации (1.4) определяются и задаются тензорами второго ранга, и представление уравнения фильтрации (1.4) будет удовлетворять принципу Неймана, если принять, что значение предельного градиента определяется и задается вдоль направления приложения градиента фильтрационного давления. Тогда уравнение фильтрации (1.4) в случае ромбической симметрии будет иметь вид:

$$w_i = -\frac{1}{\mu_0}D_{(2h)ij}\nabla_j p + \frac{1}{\mu_0}D^*_{(2h)ij}n_j, \tag{1.10}$$

где $D_{(2h)ij} = \sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha b_i^\alpha b_j^\alpha$; $D^*{}_{(2h)ij} = \sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha \gamma_\alpha b_i^\alpha b_j^\alpha$,

а для кубической симметрии оно запишется в виде (1.7).

2. Однако соотношение (1.10) или в общем виде уравнение (1.8) еще не определяют закона фильтрации ВПЖ, так как они задают лишь уравнения фильтрации при выполнении условия начала течения (в изотропном случае $|\nabla p| > \gamma$). Поэтому, для того чтобы записать закон фильтрации ВПЖ в анизотропных средах, необходимо сформулировать условие начала течения и выписать все возможные варианты фильтрационных течений, которые возникают из-за того, что в анизотропных средах значения предельного градиента изменяются в зависимо-

сти от направления. В качестве условия начала течения можно задать неравенство, которое следует из условия отрицательности работы сил трения при движении жидкости в пористой среде [9]:

$$w_i \nabla_i p < 0 . \tag{2.1}$$

После подстановки в неравенство (2.1) уравнения фильтрации (1.8) условие начала течения в направлении n_i принимает вид

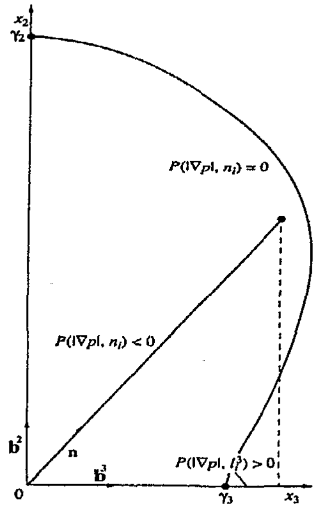
$$|\nabla p| > \frac{t_{ij} n_i n_j}{k_{ij} n_i n_j}, \tag{2.2}$$

из которого в изотропном случае и следует, что течение возможно при $|\nabla p| > \gamma$, но для анизотропных сред это представление мало информативно. Поэтому для интерпретации условия, задаваемого неравенством (2.1), по аналогии с определением направленной проницаемости [6], можно ввести коэффициент "направленной подвижности":

$$P(|\nabla p|, n_i) = -\mu_0 w_i n_i / |\nabla p| = k_{ij} n_i n_j - t_{ij} n_i n_j / |\nabla p| . \tag{2.3}$$

Тогда условие начала течения сводится к требованию положительности коэффициента подвижности: $P(|\nabla p|, n_i) > 0$. Таким образом, уравнение фильтрации (1.8) справедливо, если коэффициент подвижности при приложении воздействия в направлении n_i больше нуля.

Для изотропной среды добавление к этой системе условия отсутствия течения ($w_i = 0$), если коэффициент подвижности отрицательный, полностью бы определило закон фильтрации. Однако в анизотропных пористых средах уравнение движения (1.8) приводит к большему набору возможностей при формулировке закона фильтрации ВПЖ.



Сечение поверхности нулевой направленной подвижности (начальных градиентов) при $k_2 = k_3$ и $d_3/d_2 = 3$

Действительно, в анизотропных средах выполнение условия начала течения $P(|\nabla p|, n_i) > 0$ гарантирует реализацию пространственного (трехмерного) движения ВПЖ в соответствии с уравнением (1.8). Однако, как известно [2], на главных направлениях тензоры второго ранга принимают экстремальные значения направленных свойств. Поэтому, если $P(|\nabla p|, n_i) < 0$, то это еще не означает, что фильтрация ВПЖ невозможна. В самом деле, положим для определенности, что $\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3$. Тогда нетрудно убедиться в том, что и при выполнении условия $P(|\nabla p|, n_i) < 0$ возможно выполнение неравенства $|\nabla_i p b_i| > \gamma_3$ (рисунок). Последнее означает, что приложенного в направлении n_i градиента давления достаточно для того, чтобы условие начала течения было выполнено лишь для одной системы каналов. В этом случае фильтрационное течение будет одномерным и описывается уравнением движения (1.3) при $\alpha = 3$. Возможно и двухмерное течение, если $P(|\nabla p|, n_i) < 0$, но $(k_2 n_2^2 + k_3 n_3^2)|\nabla p||n_0| - (k_2 \gamma_2 n_2^2 + k_3 \gamma_3 n_3^2) > 0$, где $|n_0|$ — длина проекции вектора n_i на плоскость Ox_2x_3. Таким образом, закон фильтрации ВПЖ в анизотропных пористых средах допускает одно-, двух- и трехмерные формулировки.

Для унификации записи закона фильтрации ВПЖ введем следующие обозначения тензоров: $b_{ij}^{(\alpha)}, k_{ij}^{(\alpha)}, t_{ij}^{(\alpha)}$, где $\alpha = 1,2,3$ и обозначает число диад $b_i^\beta b_j^\beta, k_\beta b_i^\beta b_j^\beta, k_\beta \gamma_\beta b_i^\beta b_j^\beta$, соответственно, образующих тензоры. При этом для $\alpha = 3$ тензоры представляются в виде суммы всех трех диад, для $\alpha = 2$ — в виде суммы диад с индексами 2 и 3, а для $\alpha = 1$ — одной диадой с индексом 3 (здесь учитывается, что $\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3$). Используя введенные обозначения, уравнение фильтрации (1.8) можно представить в виде

$$w_i = -\frac{k_{ij}^{(3)}}{\mu_0} \nabla_j p + \frac{t_{ij}^{(3)}}{\mu_0 \sqrt{b_{ij}^{(3)} \nabla_i p \nabla_j p}} \nabla_j p ,$$

а закон фильтрации (1.3) запишется аналогично, но с индексом 1 в круглых скобках. Тогда закон фильтрации ВПЖ можно записать в виде

$$\begin{cases} \text{если } \sqrt{b_{ij}^{(3)}\nabla_i p \nabla_j p k_{ij}^{(3)} n_i n_j} > t_{ij}^{(3)} n_i n_j, \text{ то} \\ w_i = -\dfrac{k_{ij}^{(3)}}{\mu_0}\nabla_j p + \dfrac{t_{ij}^{(3)}}{\mu_0\sqrt{b_{ij}^{(3)}\nabla_i p \nabla_j p}}\nabla_j p; \\ \text{если } \sqrt{b_{ij}^{(3)}\nabla_i p \nabla_j p k_{ij}^{(3)} n_i n_j} < t_{ij}^{(3)} n_i n_j, \text{ но } \sqrt{b_{ij}^{(2)}\nabla_i p \nabla_j p k_{ij}^{(2)} n_i n_j} > t_{ij}^{(2)} n_i n_j, \text{ то} \\ w_i = -\dfrac{k_{ij}^{(2)}}{\mu_0}\nabla_j p + \dfrac{t_{ij}^{(2)}}{\mu_0\sqrt{b_{ij}^{(2)}\nabla_i p \nabla_j p}}\nabla_j p; \\ \text{если } \sqrt{b_{ij}^{(3)}\nabla_i p \nabla_j p k_{ij}^{(3)} n_i n_j} < t_{ij}^{(3)} n_i n_j \text{ и } \sqrt{b_{ij}^{(2)}\nabla_i p \nabla_j p k_{ij}^{(2)} n_i n_j} < t_{ij}^{(2)} n_i n_j, \text{ но} \\ \sqrt{b_{ij}^{(1)}\nabla_i p \nabla_j p k_{ij}^{(1)} n_i n_j} > t_{ij}^{(1)} n_i n_j, \text{ то} \\ w_i = -\dfrac{k_{ij}^{(1)}}{\mu_0}\nabla_j p + \dfrac{t_{ij}^{(1)}}{\mu_0\sqrt{b_{ij}^{(1)}\nabla_i p \nabla_j p}}\nabla_j p; \\ \text{если } \sqrt{b_{ij}^{(3)}\nabla_i p \nabla_j p k_{ij}^{(3)} n_i n_j} < t_{ij}^{(3)} n_i n_j \text{ и } \sqrt{b_{ij}^{(2)}\nabla_i p \nabla_j p k_{ij}^{(2)} n_i n_j} < t_{ij}^{(2)} n_i n_j \text{ и} \\ \sqrt{b_{ij}^{(1)}\nabla_i p \nabla_j p k_{ij}^{(1)} n_i n_j} < t_{ij}^{(1)} n_i n_j, \text{ то} \\ w_i = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Для идеального грунта, моделируемого системами капилляров, закон фильтрации может быть построен аналогичным образом.

В законе фильтрации ВПЖ (2.4) предельный градиент для трех- и двухмерных течений определяется непрерывно и образует поверхность предельных градиентов

$$P(|\nabla p|, n_i) = -\mu_0 w_i n_i / |\nabla p| = k_{ij} n_i n_j - t_{ij} n_i n_j / |\nabla p| = 0 .$$

Однако и этот закон содержит элементы дискретности, которые проявляются в его многовариантности. Для верификации предложенных законов течения вязкопластичной жидкости в анизотропных средах разработана специальная система постановки и интерпретации лабораторных экспериментов на образцах керна, которая позволяет определить как компоненты тензора проницаемости, так и тензора предельных градиентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. — М.: Недра, 1984. — 211 с.*
2. *Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика. — М.: Недра, 1993. — 416 с.*
3. *Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики. — М.: Наука, 1975. — 680 с.*
4. *Лохин В.В., Седов Л.И. Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов // ПММ. — 1963. — Т. 27. — В. 3. — С. 393—417.*
5. *Дмитриев Н.М. Просветность и проницаемость пористых сред с периодической микроструктурой // Изв. РАН. — МЖГ. — 1995. — № 1. — С. 79—85.*
6. *Scheidegger A. E. The physics of flow though porous media. Toronto: Univ. of Toronto Press, 1974. — 353 p.*
7. *Bear J. Dynamics of fluids in porous media. — N.Y.: Amer. Elsevier, 1967. — 764 p.*
8. *Carman P.C. Flow of gases through porous media. — London: Butterworth, 1956. — 182 p.*
9. *Дмитриев Н.М., Максимов В.М. Структура уравнений фильтрации вязкопластичных жидкостей в анизотропных пористых средах // ДАН. — 1999. —Т. 366, № 5. — С. 622—625.*