

УДК 550.383

КАСКАДНЫЕ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ДЛЯ ЖИДКОГО ЯДРА ЗЕМЛИ

© 2002 г. П. Г. Фрик, М. Ю. Решетняк, Д. Д. Соколов

Представлено академиком В.Н. Страховым 27.05.2002 г.

Поступило 30.05.2002 г.

В настоящее время жидкое ядро Земли является объектом пристального междисциплинарного исследования. Поскольку именно эта часть Земли ответственна за генерацию планетарного магнитного поля, не удивительно, что за последние годы был предложен целый ряд моделей МГД-конвекции в жидком ядре (см. подробнее [1] и приведенные там ссылки). К настоящему времени известные трехмерные модели динамо (например, [2–4]), основываясь на механизмах тепловой (концентрационной) конвекции, позволяють воспроизвести ряд наблюдаемых черт геомагнитного поля: пространственный спектр магнитного поля, инверсии геомагнитного поля, преобладание магнитной энергии над кинетической энергией конвективных движений. Модели, включающие в рассмотрение вращение твердого ядра, получают сопоставимые с данными сейсмологии [5] оценки для скорости и направления вращения твердого ядра Земли относительно мантии. Одной из основных трудностей, встречающихся на пути моделирования МГД-процессов в жидком ядре Земли, является проблема малых величин диффузионных коэффициентов. Другими словами, для описания процессов в жидком ядре Земли необходима информация в широком диапазоне пространственно-временных масштабов. Наиболее критична ситуация с гидродинамикой.

Для жидкого ядра с радиусом $L = 3500$ км оценка числа Рейнольдса $Re^M = \frac{LV_{wd}}{\nu^M}$ по скорости западного дрейфа геомагнитного поля $V_{wd} \approx 0.2^\circ/\text{год}$ дает

$Re^M \sim 10^9$, где коэффициент кинематической вязкости $\nu^M = 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ [6] (здесь и ниже индекс M указывает на то, что характерные числа вычислены по молекулярным значениям коэффициентов диффузии). Столь большая величина числа Рейнольдса соответствует состоянию развитой турбулентности. Простые оценки числа степеней свободы для колмогоровской турбулентности [7] для трехмерной задачи дают $N = Re^{9/4} \sim 10^{20}$, т.е. для дискретного описания задачи необходимо 10^{20} сеточных точек. Отметим, что наиболее детальные современные модели геодинамо [2, 3] дают среднее разрешение по пространству порядка $(10^{-2}–10^{-3})L$, что еще очень далеко от требуемых $10^{-9} L$. Аналогичная оценка числа Пекле $Pe^M = \frac{LV_{wd}}{\kappa^M} \sim 10^8$,

где молекулярный коэффициент температуропроводности $\kappa^M = 10^{-5} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$, также свидетельствует о необходимости разрешения большого числа масштабов. Наконец, оценка магнитного числа Рейнольдса $R_m^M = \frac{LV_{wd}}{\eta^M} \sim 10^3$, хотя и является самой низкой из всех приведенных выше, но и она требует использования самых современных компьютеров. Приведенные выше оценки безразмерных параметров Re^M , Pe^M , R_m^M подтверждают, что конвекция в жидком ядре Земли турбулентна, и ее описание требует специальных подходов.

Существует достаточно обширный класс полумпирических моделей турбулентности (см. обзор в [8]), позволяющих оценить диссипацию энергии на малых масштабах. Использование таких моделей формально сводится к вычислению эффективных коэффициентов вязкости и их использованию в крупномасштабных моделях. Модели этого типа широко используются в технике, но до последнего времени не адаптированы на

Институт механики сплошных сред
Российской Академии наук, Пермь
Институт физики Земли
Российской Академии наук, Москва
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

случай сильных магнитных полей*. Полуэмпирические модели, опираясь на интегральные характеристики мелкомасштабных полей, не позволяют следить за эволюцией спектральных свойств. В данной работе предлагается восполнить этот недостаток с помощью каскадных моделей турбулентности.

Каскадные модели были предложены в семидесятые годы [9, 10] для имитации поведения уравнения Навье–Стокса с помощью динамических систем с ограниченным числом степеней свободы. Модели сформулированы для переменных, которые соответствуют флуктуациям полей с волновым вектором k в диапазоне (оболочке) между $k_n = k_0 \lambda^n$ и $k_{n+1} = k_0 \lambda^{n+1}$. Параметр λ характеризует отношение двух соседних масштабов. Обычно $\lambda = 2$. Несмотря на то, что каскадные модели дают лишь упрощенное описание турбулентности, они адекватно воспроизводят многие ее свойства [11, 12]. Основываясь на отдельных разработках каскадных моделей для тепловой конвекции в приближении Бусинеска [13] и МГД-турбулентности [14], мы предлагаем аналог полных уравнений динамо на основе тепловой конвекции в терминах каскадных моделей. Рассмотрим следующую безразмерную систему из n обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую эволюцию скорости U_n , температуры Θ_n и магнитного поля B_n :

$$\begin{aligned} R_0 \frac{dU_n}{dt} = & R_0 k_n \left(-\frac{1}{8} U_{n-2} U_{n-1} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} U_{n-1} U_{n+1} + U_{n+1} U_{n+2} \right) + Ra^M \gamma_2 \Theta_n - \\ & - k_n \left(\frac{1}{8} B_{n-2} B_{n-1} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} B_{n-1} B_{n+1} + B_{n+1} B_{n+2} \right) - E^M k_n^2 U_n, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta_n}{dt} = & k_n \left(U_{n+1} \Theta_{n+2} + U_{n-1} \Theta_{n+1} - \frac{1}{2} U_{n-2} \Theta_{n-1} + \right. \\ & \left. + \Theta_{n+1} U_{n+2} - \frac{1}{2} \Theta_{n-1} U_{n+1} - \frac{1}{4} \Theta_{n-2} U_{n-1} \right) - \gamma_3 k_n^2 \Theta_n, \end{aligned}$$

* Напомним, что для Земли магнитная энергия, сосредоточенная в ядре Земли, превосходит кинетическую энергию (в системе отсчета, связанной с мантией) на несколько порядков.

$$\begin{aligned} \frac{dB_n}{dt} = & \frac{1}{6} k_n (U_{n-2} B_{n-1} - B_{n-2} U_{n-1} + U_{n-1} B_{n+1} - \\ & - B_{n-1} U_{n+1} + U_{n+1} B_{n+2} - B_{n+1} U_{n+2}) - \gamma_1 k_n^2 B_n. \end{aligned}$$

Здесь время t измеряется в $\frac{L^2}{\eta}$, а скорость U в единицах $\frac{\eta}{L}$, где $\eta = 1 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ – значение коэффициента

молекулярной магнитной диффузии. Магнитное поле измеряется в единицах $\sqrt{2\Omega\eta\rho\mu_0}$, где $\Omega = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ рад} \cdot \text{м}^{-1}$ – угловая скорость суточного вращения Земли, $\rho = 10^4 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$ – плотность жидкого ядра, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн} \cdot \text{м}^{-1}$ – магнитная постоянная. Отношения молекулярных коэффициентов диффузии к величине η заданы параметрами: $\gamma_1 = \frac{\eta^M}{\eta}$, $\gamma_2 = \frac{v^M}{\eta}$, $\gamma_3 = \frac{\kappa^M}{\eta}$. Безразмерные числа за-

даны соотношениями: Россби $R_0 = \frac{n}{2\Omega L^2}$, Экмана

$$E^M = \frac{v^M}{2\Omega L^2} \text{ и Рэлея } Ra = \frac{\alpha g_0 \Delta T L}{2\Omega \kappa^M}, \text{ где } \alpha - \text{коэф-}$$

фициент объемного расширения, g_0 – ускорение свободного падения, ΔT – мера флуктуаций температуры. Наш выбор единиц измерений позволяет получить сравнительно небольшие безразмерные значения полей, что удобно для вычислений. Отметим, что система обыкновенных уравнений (1) гораздо проще полной трехмерной системы уравнений МГД, однако она удовлетворяет основным законам сохранения [13, 14] и позволяет использовать реальные физические параметры.

Система уравнений (1) легко решается на параллельных системах вычисления; мы использовали кластер из трех персональных компьютеров на базе процессоров Alpha-21264 (каждая физическая переменная U , Θ , B считалась на отдельном процессоре, поддерживаемом MPI 2.0).

Расчеты выполнены для следующих значений параметров: $E^M = 10^{-15}$, $R_0 = 4 \cdot 10^{-7}$, $Ra^M = 4 \cdot 10^7$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 10^{-6}$, $\gamma_3 = 10^{-5}$. Последние два значения соответствуют $v^M = 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$, $\kappa^M = 10^{-5} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$. В качестве граничных условий мы использовали $U_0 = V_{wd}$, $B_0 = 10^{-2}$ Тл, взятые из наблюдений [6]. При этом единица времени составляет $4 \cdot 10^5$ лет.

Эволюция во времени квадратов полей

$$\left(\frac{1}{2} \sum_n U_n^2, \frac{1}{2R_0} \sum_n B_n^2, \frac{1}{2} \sum_n \Theta_n^2 \right)$$

представлены на рис. 1. Картина соответствует установившемуся

квазипериодическому процессу с магнитной энергией, на 2 порядка большей, чем кинетическая. На рис.2 изображены пространственные спектры трех полей. Отметим, что наиболее широкий диапазон изменений масштабов, представленный в спектре для скорости, соответствует волновому числу $k_n = 2^{33} \approx 10^{10}$ или разрешению $10^{-10}L \approx 4$ мм, в то время как максимальный масштаб в модели соответствует размеру жидкого ядра L . Рассмотренный диапазон масштабов полностью покрывает как инерционную область спектров (соответствующую прямолинейным участкам спектров), так и область диссипации (области резкого спада). Прямые линии на графиках соответствуют колмогоровскому спектру “ $-\frac{5}{3}$ ”.

Для оценки турбулентных коэффициентов вязкости вычислим (в размерном виде) скорость диссипации для полей U, Θ, B как:

$$\begin{aligned} \varepsilon_V &= \nu^M \sum_n S(k_n U_n)^2, & \varepsilon_\Theta &= \kappa^M C_p \sum_n S k_n^2 \Theta_n, \\ \varepsilon_B &= \frac{\eta^M}{\rho \mu_0} \sum_n S(k_n B_n)^2, \end{aligned} \quad (2)$$

где $S = 0.1$ – коэффициент Смагоринского [15], а $C_p = 700 \text{ Дж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$ – теплоемкость среды [6]. Тогда соответствующий турбулентный коэффициент диффузии равен $k_d^T = (\lambda^4 \varepsilon)^{1/3}$, где λ соответствует минимальному использованному n . Другими словами, если мы рассматриваем некоторую крупномасштабную модель с ограниченным разрешением $k_n \leq k_{n_{\min}}$ ($\lambda \sim n_{\min}^{-1}$) и интересуемся диссипацией энергии для больших волновых чисел $k_n > k_{n_{\min}}$, то необходимо использовать оценки (2). Для крупномасштабной модели, в которой вместо молекулярных коэффициентов диффузии нужно использовать турбулентные значения, коэффициенты перед операторами Лапласа примут вид

$$\begin{aligned} E^M &\rightarrow E^M + E^M \gamma_2^{-2/3} f_V, \\ \gamma_3 &\rightarrow \gamma_3 + \frac{(L^2 C_p \Delta T \gamma_3)^{1/3}}{\tilde{\eta}^{2/3}} f_T, \\ \gamma_1 &\rightarrow \gamma_1 + R_0^{-1/3} \gamma_1^{1/3} B^2 f_B, \end{aligned} \quad (3)$$

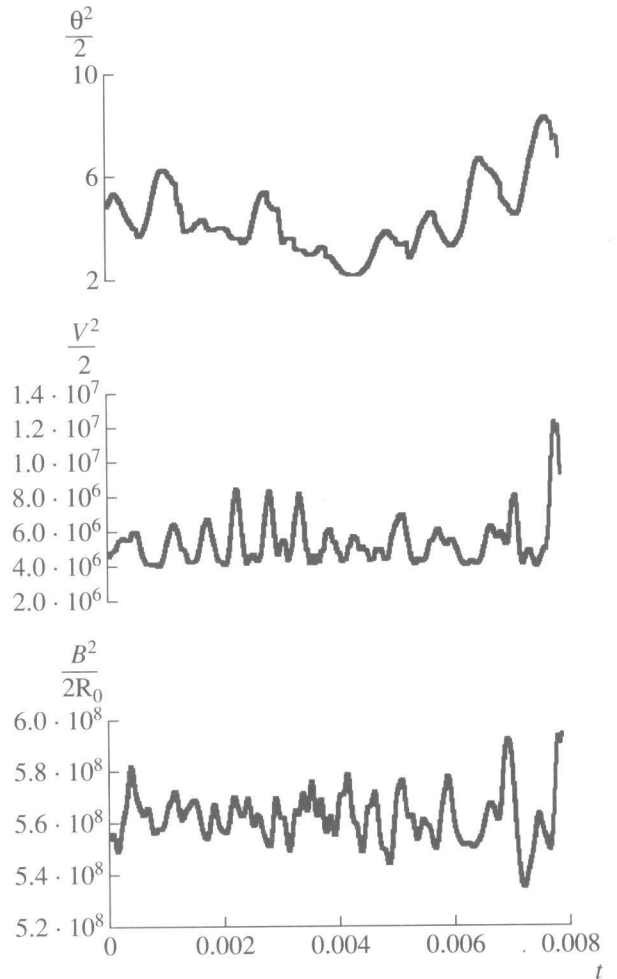


Рис. 1. Эволюция квадрата температуры, скорости и магнитного поля в каскадной модели.

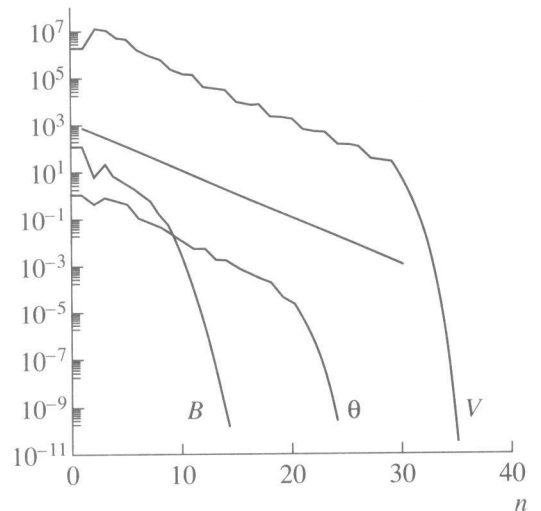


Рис. 2. Спектры температуры θ , скорости V и магнитного поля B . Прямая линия соответствует спектру Колмогорова “ $-\frac{5}{3}$ ”.

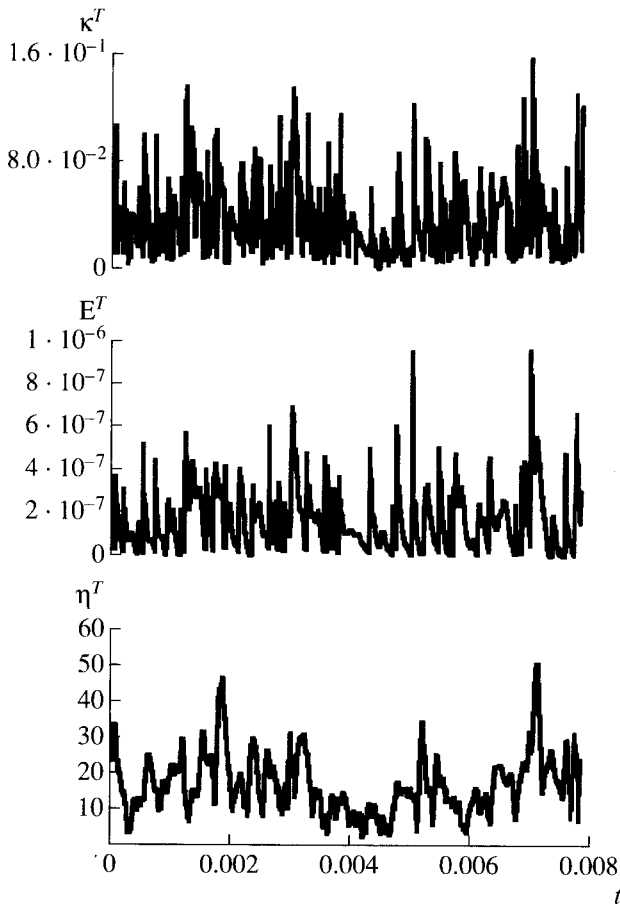


Рис. 3. Эволюция турбулентных коэффициента теплопроводности κ^T , числа Экмана E^T и коэффициента турбулентной магнитной диффузии η^T .

где множители f_V, f_Θ, f_B соответствуют частям $\epsilon_V, \epsilon_\Theta, \epsilon_B$ в (2) под знаком суммы (при этом все величины под знаком суммы уже безразмерны). Временное поведение E^T, κ^T, η^T изображено на рис. 3. Видно, что присутствие турбулентности кардинально меняет величины диффузионных коэффициентов. Оценивая турбулентные коэффициенты переноса как $\nu^T = 10^2, \kappa^T = 10^{-2}$ и $\eta^T = 20 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$, мы получаем оценки для безразмерных параметров: $Re^T \sim 10, Pe^T \sim 10^5, R_m^T = 10^2$. Данные значения уже без труда могут быть использованы в численном моделировании крупномасштабных процессов динамо. Данный подход также позволяет сопрягать каскадные модели с крупномасштабными моделями, когда обе модели считаются одновременно и обмениваются между собой информацией.

Упомянем некоторые эффекты, не учтенные нашей моделью, но, возможно, способные модифицировать наши результаты. Мы не учитывали

роль сил Кориолиса, поскольку они не вносят энергию в МГД-систему. Однако они в принципе могут привести к некоторому подавлению турбулентности вращением и сделать ее анизотропной. Наша модель ограничена также тем, что мы не вычисляем значений скорости и магнитного поля в самом большом масштабе, а берем их из наблюдений, предполагая, что далее спектр является падающим, и подбирая согласованное с этим условием значение числа Рэлея. Разумеется, полная последовательная модель геодинамо, содержащая описание как крупномасштабных переменных в рамках сеточной модели, так и мелкомасштабных переменных в рамках каскадной модели, должна в будущем отказаться от этих ограничений.

Авторы выражают признательность Межведомственному суперкомпьютерному центру (www.jscc.ru) за предоставленное компьютерное время.

Мы благодарны Г.С. Голицыну за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 00-05-64062), РФФИ-Урал 01-02-96482 и фонда INTAS (грант 99-00348).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Решетняк М.Ю. // ДАН. 2001. V. 380. № 5. С. 15–19.
2. Glatzmaier G.A., Roberts P.H. // Nature. 1995. V. 377. P. 203–209.
3. Kuang W., Bloxha J. // Nature. 1997. V. 389. P. 371–374.
4. Glatzmaier G.A., Roberts P.H. // Phys. Earth and Planet. Inter. 1995. V. 91. P. 63–75.
5. Song X., Richards P.G. // Nature. 1996. V. 382. P. 221–224.
6. Gubbins D., Roberts P.H. In: Geomagnetism. N. Y.: Acad. Press, 1987. V. 2. 340 p.
7. Frisch U. Turbulence: the Legacy of A.N. Kolmogorov. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. 296 p.
8. Fletcher C. A. Computational Techniques for Fluid Dynamics. N. Y.: Springer, 1988. P. 504.
9. Bohr T., Jensen M., Paladin G., Vulpiani A. Dynamical Systems Approach to Turbulence. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. P. 373.

10. Фрик П.Г. Турбулентность: модели и подходы. Курс лекций. Пермь: Перм. гос. технич. ун-т, 1999. Т. 2. С. 136.
11. Деснянский В.Н., Новиков Е.А // ПММ. 1974. Т. 38. С. 507–513.
12. Гледзер Е.Б. // ДАН. 1973. Т. 209. № 5. С. 1046–1048.
13. Ложкин С.А., Фрик П.Г. // Изв. РАН. МЖГ. 1998. V. 6. С. 37–46.
14. Frick P., Sokoloff D. // Phys. Rev. E. 1998. V. 57. P. 4155–4164.
15. Smagorinsky J. // Monthly Weather Rev. 1963. V. 91. P. 99–164.