ТРУДЫ МИНЕРАЛОГИЧЕСКОГО МУЗЕЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР · IV
Travaux du Musee Minéralogique près l'Académie des Sciences de l'URSS · IV

Д. К. Моцок

Связь и вывод возможных симметрических операций

(Представлено академиком В. И. Вернадским в заседании Отделения Физико-Математических Наук 14 мая 1929 года)

Развитие физики за последние годы открыло возможность прилагать учение о симметрии к атомным решеткам и даже к самим атомам; эти новые задачи, естественно, требуют углубления и развития теории симметрии.

§ 1. Обзор элементов. В симметрии конечных систем фигур издавна обнаружены непосредственным наблюдением следующие элементы симметрии: 1) плоскость отражения P, только 2-го порядка; 2) ось вращения L^n, любого целого порядка; 3) сложная симметрия I рода, только четного порядка; ее операция есть соединение вращения и отражения; указана Гадолиным; простейшая разновидность ее 2-го порядка часто называется центром обратного равенства (C), а операция — инверсией; при ней каждая точка переводится по диаметру на противоположный конец; 4) сложная симметрия II рода, только четного порядка, есть соединение вращения и инверсии; указана Е. С. Федоровым.

Понятие о симметрии представляется нам единым и цельным; поэтому обилие элементов симметрии, притом глубоко различных, как ось и плоскость, всегда вызывало стремление свести их к одному представлению. Во всех видах (классах) симметрии, как известно, элементы связаны между собой так, что любая пара элементов дает третий, например две плоскости в пересечении дают ось; поэтому Г. В. Вульф предлагал считать отражение основной операцией; это давало ценные аналитические преимущества, но вводило новые понятия мнимых плоскостей для получения изолированной оси L^n, или инверсии C.

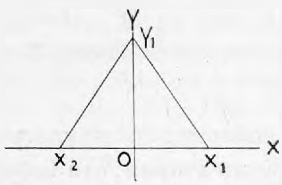
В симметрии бесконечных систем фигур известны, кроме всех вышеуказанных, еще такие операции: 1) поступательное движение, или поступание (термин Е. С. Федорова); 2) винтовое движение или скользящее вращение, состоящее из поступания и вращения; 3) скользящее отражение, состоящее из поступания и отражения.

Этим операциям отвечают особые элементы симметрии: для 1-й — не указан, для 2-й — винтовая ось, для 3-й — плоскость скольжения.

§ 2. Симметрия и операция. В конечных симметричных система[х] фигуры располагаются вокруг некоторого центра O на равных от нег[о] расстояниях, равномерно распределяясь в объеме шара, описанног[о] вокруг O; при этом фигуры, очевидно, намечают деление объема шара н[а] равные доли (секторы) по числу фигур.

В бесконечных системах фигуры аналогично будут делить на ра[в]ные доли бесконечное пространство.

Отсюда ясна связь понятия симметрии с понятием о выполнени[и] пространства конечного (шара) или бесконечного.



Фиг. 1.

Условимся в следующих определениях: геометрические образы равны, если они могут быть совмещены или являются зеркальным отра[]жением друг друга; доли пространства су[ть] его участки, выполняющие все данное про[]странство (конечное или бесконечное) без проме[]жутков; расположение равных фигур в равных долях пространства однообразно, если при совмещении долей (прямо[м] или зеркальном) совмещаются и расположенные в них фигуры и обратно.

Тогда можно сказать, что, если совокупность равных фигур обладае[т] симметрией, то эти фигуры однообразно располагаются во всех равны[х] долях шара или бесконечного пространства.

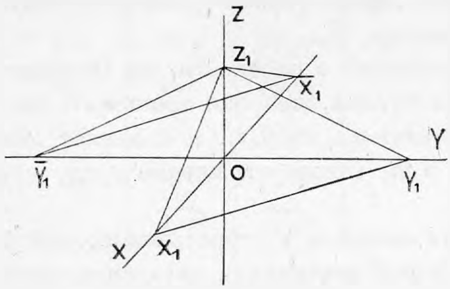
Если дана такая симметричная совокупность или система фигур, т[о] симметрическая операция есть перевод фигуры из одного возмо[ж]ного положения во всякое возможное положение той же совокупности.

Исходное (S) и конечное (S') положения фигуры вполне определяю[т] операцию. Обратно же операцию можно выразить любой из n пар S и S', где n — величина симметрии совокупности, ибо за S можно принят[ь] каждую из n фигур. Если исходное и конечное положения совпадают, т. е. фигура никуда не переносится, то операцию можно назвать тожде[]ством (Identität), с элементом 1, 1-го порядка.

§ 3. Связь отражения и вращения в плоскости. В двухмерно[м] пространстве, т. е. в плоскости, отражению отвечает прямая отражения, а вращению — точка вращения. Треугольники oy_1x_1 и oy_1x_2 (фиг. 1), свя[]занные прямой отражения oy, несовместимы, как бы их ни поворачиват[ь] в плоскости чертежа; но если принять oy за ось L^2, то $\Delta\ oy_1x_2$ можно со[]вместить с $\Delta\ oy_1x_1$, обведя первый вокруг L^2 на 180° по трехмерному про[]странству. Другими словами, двойная ось L^2 трехмерного пространства может быть прямой отражения в двухмерном.

Согласно с геометрией будем обозначать n-мерное пространство символом R_n, например R_2, R_3, а необходимую для симметрических операций простейшую фигуру из $n+1$ точек, не лежащих в одном R_{n-1} (симплекс), символом S_{n+1}, например S_3, S_4. Исходное положение обозначим S_{n+1}, конечное S'_{n+1}.

Пусть в R_3 (фиг. 2) имеем симплекс S_4 $(x_1y_1z_1)$ из 4 точек (вершин), не лежащих в одной плоскости (неправильный тетраедр); прямоугольные



Фиг. 2.

координаты этих точек, (ooo) (x_1oo) (oy_1o) (ooz_1); одна точка совмещена с началом o, а три других — с осями координат. Плоскость с отрезками $x_1y_1z_1$ есть грань симплекса S_4 $(x_1y_1z_1)$, вполне определяющая S_4; ее уравнение в отрезках на осях:

$$\frac{x}{x_1}+\frac{y}{y_1}+\frac{z}{z_1}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Повернув эту плоскость на 180° вокруг L^2 — oz получим плоскость:

$$\frac{x}{-x_1}+\frac{y}{-y_1}+\frac{z}{z_1}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

определяющую симплекс S'_4 $(\bar{x}_1\bar{y}_1z_1)$, т. е. операция поворота на $\angle \pi$ заменила отрезки $x_1y_1z_1$ отрезками $\bar{x}_1\bar{y}_1z_1$, изменив знаки на двух буквах.

Пересекая оба симплекса, S_4 и S'_4, и ось L^2 плоскостью, проходящей через L^2, напр. zoy, уравнение коей

$$x=o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

мы при совместном решении (1) и (3) получаем прямую

$$\frac{y}{y_1}+\frac{z}{z_1}=1,$$

а при решении (2) и (3) прямую

$$\frac{y}{-y_1}+\frac{z}{z_1}=1;$$

эти две прямые с отрезками z_1y_1 и $z_1\bar{y}_1$ определяют в плоскости сечения два плоских симплекса S_3 и S'_3, т. е. два треугольника oz_1y_1 и $oz_1\bar{y}_1$, связанные отражением в прямой oz (бывшей L^2).

Как видно, при сечении была отброшена ось x'ов.

Пересекая же S_4 и S'_4 плоскостью перпендикулярной к оси I например xoy с уравнением $z = o$, мы тем самым отбросим ось z'ов и получим в плоскости сечения треугольники ox_1y_1 и $o\overline{x}_1\overline{y}_1$, связанные вращением на $\angle \pi$ вокруг точки O.

Итак, двойной элемент вращения и прямая отражения в двухмерном пространстве, R_2, суть только разные сечения двойной оси симметрии I трехмерного пространства, R_3.

Заметим, что вращение в плоскости xoy заменяет x_1y_1 на $\overline{x}_1\overline{y}_1$, т. е. меняет знаки на двух буквах, подобно вращению (на π) в пространстве R_3; а отражение заменяет y_1z_1 на $\overline{y}_1z_1$, т. е. меняет знак на одной букве подобно отражению в R_2 (напр. отражение $z_1x_1y_1$ в плоскости xoz дает $z_1x_1\overline{y}_1$).

Но если сечение сводится к отбрасыванию одной координатной оси с двумя лежащими на ней вершинами двух симплексов, при чем эти вершины могут лежать на отбрасываемой оси или по одну сторону или по разные стороны от o, имея одинаковые или разные знаки, то возможен и обратный процесс прибавления оси и двух равноотстоящих вершин на ней с одинаковыми или разными знаками.

§ 4. Вывод операций 1-го и 2-го порядка. В нуль-мерном пространстве (точке) R_0 симплексы S_1 и S'_1 будут тоже точками, совмещенными друг с другом; здесь возможна только одна операция тождества, 1 (единица), 1-го порядка.

Добавляя к точке O одну ось x'ов мы переходим к R_1: прибавляя по этой оси две новых вершины для равных симплексов S_2 и S'_2 с одинаковыми знаками, т. е. 2 точки с координатами x_1 и x_1, получим совпадение $S_2(x_1)$ и $S'_2(x_1)$, т. е. тождество; прибавляя вершины с разными знаками и координатами x_1 и $\overline{x}_1$, получим $S_2(x_1)$ и $S'_2(\overline{x}_1)$ в виде отрезков ox_1 и $o\overline{x}_1$, связанных операцией отражения в точке O. Возможны, очевидно, только два случая. Результаты вывода будем наносить на таблицу I, отмечая там отрезки, отсекаемые на осях точками R_0, прямыми R_1, плоскостями R_2, вообще образами R_{n-1}, определяющими 2-й симплекс S'_{n+1}; а отрезки для 1-го симплекса S_{n+1} всегда все положительны и указаны в строке „тождество"; значки ($_1$) при $x, y \ldots\ldots$ опускаются.

Далее, прибавляя к R_1 ось y'ов, переходим к R_2; в R_1 мы имели 2 случая: S_2 и S'_2, связанные: 1) тождеством и 2) отражением. Исходя из тождества S_2 (x_1) и S'_2 (x_1) и прибавляя по оси y'ов точки с координатами y_1 и y_1 получим тождество: $S_3(x_1y_1)$ и S'_3 (x_1y_1); прибавляя y_1 и $\overline{y}_1$ получим отражение: S_3 (x_1y_1) и S'_3 $(x_1\overline{y}_1)$. Затем, исходя из отражения $S_2(x_1)$ и $S'_2(\overline{x}_1)$, получим от прибавления y_1 и y_1 опять отражение: S_3 (x_1y_1) и S'_3 $(\overline{x}_1y_1)$, а от прибавления y_1 и $\overline{y}_1$ получим вращение на угол π: S_3 (x_1y_1) и S'_3 $(\overline{x}_1\overline{y}_1)$; здесь, очевидно, симплексы выражены треугольниками ox_1y_1 и $o\overline{x}_1\overline{y}_1$.

Операции 1-го и 2-го порядка

Таблица 1

R_0	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_n	
o	x	xy	xyz	$xyzt$	$xyztu$	$xyztuv$	—	тождество
	$\bar{x}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}yzt$	$\bar{x}yztu$	—	—	отражение
		$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}zt$	$\bar{x}\bar{y}ztu$	—	—	вращение
			$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}t$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}tu$			
				$\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}u$			
					$\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}\bar{u}$			

Итак, переходя от R_n к следующему по порядку пространству R_{n+1}, мы в таблице 1 из каждой операции R_n получаем две операции R_{n+1}, одну аналогичную — в той же строке, другую, более сложную, в следующей книзу строке.

Наконец, переходя от R_2 к R_3 из тождества $S_3\ (x_1y_1)$ и $S'_3\ (x_1y_1)$ получим тождество $S_4\ (x_1y_1z_1)$ и $S'_4\ (x_1y_1z_1)$ и отражение $S_4\ (x_1y_1z_1)$ и $S'_4\ (x_1y_1\bar{z}_1)$, из отражения $S_3 \rightarrow S'_3\ (\bar{x}_1y_1)$ получим отражение $S_4 \rightarrow S'_4$ $(\bar{x}_1y_1z_1)$, и вращение $S_4 \rightarrow S'_4\ (\bar{x}_1y_1\bar{z}_1)$, из вращения $S_3\ (x_1y_1)$ и $S'_3\ (\bar{x}_1\bar{y}_1)$ получим вращение $S_4 \rightarrow S'_4(\bar{x}_1\bar{y}_1z_1)$ и инверсию $S_4 \rightarrow S'_4\ (\bar{x}\bar{y}z)$.

Очевидно, этот процесс можно продолжать и дальше, получая все операции 2-го порядка в любом многомерном пространстве R_n.

Так, в R_4 получаем из $S_4 \rightarrow S'_4\ (\bar{x}yz)$ отражение $S_5\ (xyzt) \rightarrow S'_5\ (\bar{x}yzt)$ в зеркальном трехмерном пространстве R_3, из $S_4 \rightarrow S'_4\ (\bar{x}\bar{y}z)$ вращение $S_5\ (xyzt) \rightarrow S'_5\ (\bar{x}\bar{y}zt)$ вокруг некоторой плоскости zt, которая пересекает плоскость вращения xy в одной точке O (это возможно в R_4), затем из $S_4 \rightarrow S'_4\ (\bar{x}\bar{y}\bar{z})$ получаем сложную симметрию $S_5\ (xyzt) \rightarrow S'_5(\bar{x}\bar{y}\bar{z}t)$ и, наконец, новую, пока неизвестную, операцию $R_4\ S_5\ (xyzt) \rightarrow S'_5\ (\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t})$.

§ 5. **Связь двойной оси и плоскости.** В § 3 было дано аналитическое доказательство того, что разные сечения L^2 из R_3 дают вращение и отражение в плоскости, R_2. Вполне аналогично можно показать аналитически, что сечения двойного элемента вращения из R_4 дают L^2 и P в R_3.

Определяющий образ R_3 (§ 4) симплекса S_5 и R_4 имеет уравнение:

$$\frac{x}{x_1}+\frac{y}{y_1}+\frac{z}{z_1}+\frac{t}{t_1}=1;$$

повернув его в плоскости zt на $\angle\ \pi$ вокруг элемента вращения xy получим согласно таблице 1:

$$\frac{x}{x_1}+\frac{y}{y_1}+\frac{z}{-z_1}+\frac{t}{-t_1}=1;$$

В таблице 1 дан поворот в плоскости xy, но, очевидно, можно брать для поворота любую плоскость. Пересекая эти образы трехмерным пространством R_3, проходящим через обе координатные оси x и y перпендикулярно, например к оси t, и имеющим уравнение $t=0$, мы отсечем ось t и получим два симплекса $S_4\,(x_1 y_1 z_1)$ и $S'_4\,(x_1 y_1 \bar{z})$, очевидно связанные отражением в плоскости xy; следовательно, элемент вращения в $R_4 - xy$ является плоскостью.

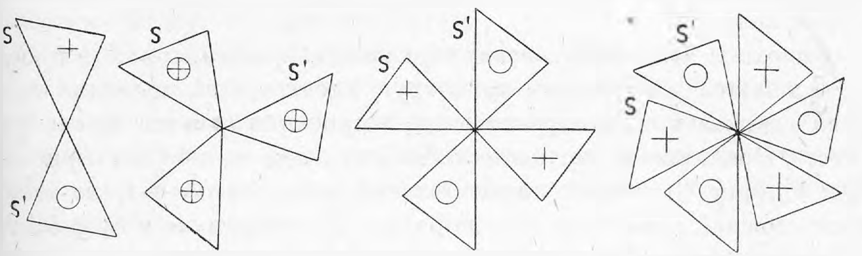
Пересекая же образы другим R_3 перпендикулярным, например к оси x, т. е. с уравнением $x=o$, мы отсечем ось x'ов и получим $S_4\,(y_1 z_1 t_1)$ и $S'_4\,(y_1 \bar{z}_1 \bar{t}_1)$, явно связанные вращением вокруг оси y на $\angle\ \pi$.

Из таблицы 1 ясно, что идя назад, от операций R_n к R_{n-1}, вообще получаем по 2 случая, — отсекая букву с $+$, получаем операцию в той же строке, отсекая букву с $-$, получаем операцию в высшей строке. Только тождество, где все $+$, и нижняя операция, где все $-$, дают по одному случаю.

§ 6. Обобщение операции вращения со 2-го на n-й порядок. Пусть имеем S_3 и S'_3, связанные в плоскости двойным элементом вращения, т. е. отстоящие по окружности на $\angle\ \pi$. Если мы повернем S_3 по окружности на $\angle\ \alpha$, то и S'_3 передвинется на $\angle\ \alpha$, т. е. связь S_3 и S'_3 между собою ($\angle\ \pi$) и с центром не изменится; она является инвариантом. То же произойдет при повороте системы координат на $\angle -\alpha$. Алгебраически инвариантность какого-либо свойства определяется тем, что формулы, выражающие эту связь, не изменяются при передвижении системы координат, т. е. при замене старых значений координат $x_1 y_1 z_1 \ldots$ новыми $x'_1 y'_1 z'_1 \ldots$; правильность этой замены, т. е. инвариантность алгебраически доказывается вообще довольно сложно, но геометрически инвариантность очевидна и постигается очень легко, как в приведенном примере.

В виду этого, не вдаваясь в алгебраические преобразования, отметим, как очевидность, что во всякой операции, где проявляется инвариантность, т. е. где можно так или иначе передвигать систему координат и связанный с нею элемент симметрии, не меняя связи фигур, — там такая же инвариантность проявляется и относительно целого ряда других операций, подобных данной; поэтому данная операция относительно инвариантности оказывается лишь частным случаем бесконечной группы ей подобных.

Так, в случае операции вращения 2-го порядка (на угол π) в R_3 систему координат можно вращать вокруг центра; очевидно, что операция вращения на любой угол φ будет также инвариантна относительно вращения системы координат. Этот прием позволяет обнаруживать или обобщать симметрические операции. Не трудно видеть, что любой $\angle\,\varphi$ действительно дает возможную операцию порядка $n=\frac{2\pi}{\alpha}$, где α общий наибольший делитель 2π и φ. Например при $\varphi=72^\circ, \alpha=72^\circ, n=\frac{2\pi}{72^\circ}=5$; при $\varphi=144^\circ$, $\alpha=72^\circ$, $n=5$; поворот на 144°, хотя не является делителем полного оборота (2π), все же есть операция 5-го порядка, приводящая фигуру после пятикратного повторения к тождеству: $144^\circ \times 5=720^\circ=$ $=2.=2\times 360^\circ$ 360° (фигура делает 2 оборота; но совокупность всех 5 ее положений тождественна с обыкновенной L^5).



Фиг. 3.

Если $\angle\,\varphi$ несоизмерим с 2π, т. е. $\alpha=0$, то $n=\frac{2\pi}{0}=\infty$, т. е. имеем ось вращения L^∞ тождественную L^∞ с операцией вращения на бесконечно малый угол.

§ 7. Вывод операций n-го порядка. Возвращаясь к таблице 1, обобщаем случай вращения в R_2 и получаем операции вращения n-го порядка; на фиг. 3 для наглядности даны все n фигур у L^n. Прибавляя к треугольникам S_3 и S'_3 точки по одну сторону от плоскости чертежа, (напр. сверху), получим оси вращения L^n в R_3. Прибавляя точки к S_3 и S'_3 по разные стороны поочередно (на фиг. 3 — сверху „+", снизу „o") получим: 1) из вращения 2-го порядка — ось сложной симметрии I рода 2-го порядка; 2) из вращения 3-го порядка — ось сложной симметрии II рода 6-го порядка, ибо тождество получается только после 2 полных оборотов, $120^\circ \times 6=720^\circ=2\times 2\pi$ и $n=\frac{720^\circ}{120^\circ}=6$; 3) из вращения 4-го порядка — ось сложной симметрии I рода 4-го порядка, 4) из вращения 5-го порядка — ось сложной симметрии II рода 10-го порядка, 5) из вращения 6-го порядка — ось сложной симметрии I рода 6-го порядка и т. д. Итак, операции сложной симметрии I и II родов нельзя относить к двум разным элементам; они суть только разные порядки одной и той же операции, имеющей в своем составе вращение четного или нечетного порядка.

Эту единую операцию с вращением любого целого порядка n будем назы-вать **зеркальным вращением.**

Здесь каждая точка симплекса S_n с координатами $(x_1 y_1 z_1)$ соверша- при единой операции сложное движение, но проекция этой точки с коор-динатами $(x_1 y_1)$ на плоскости xy совершает обыкновенное вращение вокр- оси z, а проекция (z_1) на ось z совершает в то же время — отражени- в зеркальной плоскости xy; эти составляющие операции проекций одно- точки независимы одна от другой, — вращение может иметь любой поря-док n при одном отражении; вообще независимость каждой координа- от всех остальных есть основное свойство координатной системы; в про-стейшей операции при $n=2$ (табл. 1 — $\overline{x}\overline{y}\overline{z}$) кроме того все оси равно-значны; за ось вращения можно выбрать любую из x, y, z и даже из про-чих направлений.

Операция $\overline{x}\overline{y}\overline{z}t$ представляет зеркальное вращение в R_4; проекци- $x_1 y_1$ вращается в плоскости xy вокруг плоскости zt, проекция z_1 отра-жается в зеркальном пространстве xyt, а проекция t_1 точки на ось t сто- на месте. Вращение может быть любого порядка n, ибо мы прибавляе- к S_4 и S'_4 (фиг. 3) точки с положительной координатой $+t_1$ ко всем эле-ментам сложной симметрии n-го порядка. Прибавляя же к S_4 и S_4' точк- с $+t_1$ и $-t_1$ (простейший случай — $\overline{x}\overline{y}\overline{z}\overline{t}$), мы находим, что в то время ка- проекция $(x_1 y_1)$ данной точки симплекса будет иметь вращение любо- порядка n в плоскости xy, проекция той же точки на плоскость zt изме-нит при операции свои координаты $z_1 t_1$ на $\overline{z}_1 \overline{t}_1$, т. е. совершит типично- вращение на $\angle \pi$ в плоскости zt вокруг плоскости xy; это вращени- 2-го порядка в плоскости zt независимо от вращения xy, ибо последне- может как угодно менять порядок n при одном и том же 2-ом порядке z- затем при $n=2$ оба вращения xy и zt абсолютно равноценны в выраже-нии $\overline{x}\overline{y}\overline{z}\overline{t}$ и могут быть заменены любой парой, например xz и yt; поэтом- надо признать, что и вращение zt может иметь любое n, когда у xy $n=$- но, если в какой-либо плоскости возможно независимое вращение с $n=$- то там же возможно вращение с любым n, т. е. **проекции** xy и zt могу- иметь одновременно разные вращения любого порядка n и k в свои- плоскостях, пересекающихся в одной точке; поэтому данную операцию- можно назвать **двувращением**, хотя она доступна только анализу, но не- воображению.

Из таблицы 1 теперь ясно, что при переходе к R_5, R_6 и т. д. все- операции кроме тождества, отражения и вращения, будут вообще опер-циями сложной симметрии или составными; при четном числе $(2n)$ мину-сов они будут состоять из n вращений, а при нечетном $(2n+1)$ — и- n вращений и одного отражения.

§ 8. **Номенклатура и обозначение операций.** Термины опера-ций разных пространств R_n каждой строки таблицы 1 естественно сохраняются одинаковыми. Первые 3 термина вполне удовлетворительны. Тождество 1, дает всюду совместимые фигуры; отражение, P, дает зеркальные, несовместимые фигуры; вращение дает совместимые фигуры. Термин сложной симметрии по вышеуказанным мотивам можно сохранить лишь в качестве общего понятия, объединяющего все составные операции как зеркальное вращение, двувращение и другие; для каждой же отдельной сложной операции необходим особый термин.

Далее, зеркальное вращение в R_3 дает, как известно, несовместимые фигуры; в R_4, R_5 и т. д. для выяснения вопроса о совместимости, будем увеличивать порядок составляющего вращения n до ∞, тогда элементарный угол вращения будет бесконечно уменьшаться, и операция, состоящая из вращения и отражения, сведется в пределе к одному отражению, что доказывает несовместимость фигур.

Следующая строка дает двувращение; уменьшая одно вращение, сведем операцию двувращения в пределе к другой его составной части, к вращению, что доказывает совместимость фигур.

Ниже операция с 5 минусами состоит из двувращения и отражения и будет зеркальным двувращением; тем же методом обнаруживается несовместимость фигур.

При рассмотрении дальнейших операций очевидно остается делать числовые прибавки: три—, четыре—, пяти— и т. д. к терминам вращение (совместимые фигуры) и зеркальное вращение (несовместимые), чередуя последние, что достаточно выражает основные свойства операций.

При обозначении операций и их элементов симметрии символами необходимо: во-первых, отмечать элементы совмещающие и несовмещающие (зеркальные) разными буквами; во-вторых, отмечать мерность пространства r, к которому относится элемент; в третьих, указывать в элементах сложной симметрии порядки как составных частей, так и целого, и в четвертых, держаться возможно ближе к общепринятым обозначениям. Для простых элементов можно принять символы: элемент тождества для R_r—${}^01, {}^11, {}^21, {}^31, \ldots {}^r1$; элемент отражения для R_r—${}^1P, {}^2P, {}^3P, {}^4P, \ldots {}^rP$ элемент вращения m порядка для R_r—${}^2L^m, {}^3L^m, {}^4L^m \ldots {}^rL^m$; цифры вверху слева означают пространство, справа — порядок; элемент вращения 1-го порядка (на $\angle 2\pi$) равен тождеству ${}^rL^1 = {}^r1$; нотация зеркального вращения (оси сложной симметрии I рода, L_{2n} , II рода L'_{2n}) не удовлетворяет 1-му и 3-му условиям и притом очень мало распространена в литературе. Элементы зеркального вращения как зеркальные следует обозначать, исходя из буквы P, а не L.

Одна составная часть операции зеркального вращения, отражение, всегда имеет порядок 2-й, неразрывно связанный с символом P, другая составная часть, вращение, имеет любой порядок n, отмечаемый цифрой справа внизу; порядок же всей операции в целом, m, отмечается справа вверху.

Порядок есть число операций, приводящих точку в исходное положение (тождество); в сложных элементах это достигается, когда все составные операции одновременно приводят свои проекции данной точки в исходное положение, например при зеркальном вращении с вращением порядка $n=3$, после трех операций (2π) проекция вращения достигает тождества (фиг. 3), а отражения — нет, и совпадение наступает лишь после 6-й операции; следовательно, порядок m должен быть наименьшим кратным составных порядков: 2 и n. Отсюда получаем ряд зеркального вращения например для R_3 — ${}^3P_1^{\,2}, {}^3P_2^{\,2}, {}^3P_3^{\,6}, {}^3P_4^{\,4}, {}^3P_5^{\,10}, {}^3P_6^{\,6}, \ldots {}^3P_n^{\,m}$; причем $P_1^{\,2}$ отвечает повороту на $\frac{2\pi}{1}=360^\circ$ плюс отражение, т. е. равно отражению, ${}^3P_1^{\,2}={}^3P$; ${}^3P_2^{\,2}=C$; ${}^3P_3^{\,6}$ — ось сложной симметрии II рода, ${}^3P_4^{\,4}$ и ${}^3P_6^{\,6}$ — оси сложной симметрии I рода.

То же правило кратности m относительно составных порядков сохраняется для всех сложных элементов, причем всюду под P разумеется порядок 2, например ${}^4L^{12}_{4.3}$, ${}^6L^{12}_{6.4}$, ${}^4P^{14}_{7}$, ${}^5P^{20}_{5.4}$.

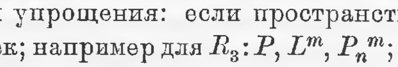
Все данные сведены в таблице 2. Цифры 0, 1, 2, 3 .... в таблице 2 определяют элементы симметрии: точка R_0, прямая R_1, плоскость R_2 и т. д. (см. § 9).

Здесь возможны упрощения: если пространство R_r известно, можно отбрасывать его значек; например для R_3: P, L^m, $P_n^{\,m}$; а в сложной симметрии можно отбрасывать кратное m, когда оно легко расчитывается и например вместо $P_2^{\,2}$, $P_3^{\,6}$, $P_4^{\,4}$, $P_6^{\,6}$, $P^2_{2.2}$, $P^4_{4.2}$, $L^2_{2.2}$ и т. д. писать P_2, P_3, P_4, P_6, $P_{2\cdot 2}$, $P_{4\cdot 2}$, $L_{2\cdot 2}$ и т. д. Инверсия, меняющая все знаки на осях, в разных R_n тождественна с ^{01}, ${}^1P$, ${}^2L^2$, ${}^3P_2$, ${}^4L_{2\cdot 2}$, и т. д. давая поочередно то совместимые, то несовместимые фигуры. Отдельные операции, например вращение на 90° влево, можно обозначать так: $-L^4$, на 60° вправо $+L^6$, на 60° влево $-L^6$ и т. д. Для L^2: $+L^2=-L^2$.

§ 9. Геометрический смысл элементов симметрии. На прямой R_1 точки A_1 (x_1) и A_2 (x_2) (фиг. 4) связаны отражением в точке O по формуле

$$x_1=-x_2; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Если перенести начало координат в точку $O'(+a)$, новые координаты будут: A_1 (x_1') и A_2 (x_2').



Фиг. 4.

Сохранится ли формула при подстановке новых координат: $x_1'=$ $=-x_2'$?

Симметрические операции конечных систем

Таблица 2

R_0	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R^r
тождество 0 $^{0}1$	тождество 1 $^{1}1$	тождество 2 $^{2}1$	тождество 3 $^{3}1$	тождество 4 $^{4}1$	тождество 5 $^{5}1$	тождество r $^{r}1$
	отражение 0 ^{1}P	отражение 1 ^{2}P	отражение 2 ^{3}P	отражение 3 ^{4}P	отражение 4 ^{5}P	отражение $r-1$ ^{r}P
		вращение 0 $^{2}L^m$	вращение 1 $^{3}L^m$	вращение 2 $^{4}L^m$	вращение 3 $^{5}L^m$	вращение $r-2$ $^{r}L^m$
			зеркальное вращение 0 $^{3}P_n{}^m$	зеркальное вращение 1 $^{4}P_n{}^m$	зеркальное вращение 2 $^{5}P_n{}^m$	зеркальное вращение $r-3$ $^{r}P_n{}^m$
				двувращение 0 $^{4}L^m_{n.k}$	двувращение 1 $^{5}L^m_{n.k}$	двувращение $r-4$ $^{r}L^m_{n.k}$
					зерк. двувращение 0 $^{5}P^m_{n.k}$	зерк. двувращение $r-5$ $^{r}P^m_{n.k}$
						тривращение $r-6$ $^{r}L^m_{n.k.l}$
						зерк. тривращение $r-7$ $^{r}P^m_{n.k.l}$
						четыревращение $r-8$ $^{r}L^m_{n.k.l.o}$
						зерк. четыревращение $r-9$ $^{r}P^m_{n.k.l.o}$
						пятивращение $r-10$ $^{r}L^m_{n.k.l.o.p}$

Подставляя в (4) значения по обычным формулам преобразования $x_1 = a + x_1'$; $x_2 = a + x_2'$, получим: $a + x_1' = -a - x_2'$ или $2a + x_1' = -x_2'$; формула (4) изменилась, т. е. инвариантности нет (см. § 6). Если же исследовать операцию тождества, 1, с формулой $x_1 = x_2$, то при той же подстановке получим: $a + x_1' = a + x_2'$ или $x_1' = x_2'$; формула, выражающая связь S_2 и S_2', не изменилась, т. е. операция, 1, инвариантна относительно передвижения системы координат по прямой R_1; это — простейший случай алгебраического доказательства инвариантности.

Геометрически очевидно, что для ${}^2P$ в R_2 систему можно передвигать по прямой отражения, не меняя связи между симплексами S_3 и S_3', но нельзя вращать, а для ${}^2L^n$ можно вращать вокруг точки 0, но нельзя передвигать. В R_3 для ${}^3P$ систему координат можно как угодно двигать и вращать по плоскости отражения, не меняя наклона системы координатных осей к плоскости отражения; для ${}^3L^m$ можно двигать только по прямой (оси) вращения z и вращать вокруг нея; для ${}^3P_n$ — нельзя никуда передвигать начало из точки O и можно только вращать вокруг точки O в одной плоскости; для ${}^3P_2 = C$ можно вращать вокруг O как угодно.

Таким образом можно сказать, что элемент симметрии есть образ инвариантности, т. е. такая точка R_0, или прямая R_1, или плоскость R_2, или R_3, вообще R_n, в которой можно передвигать и вращать систему осей координат, не меняя связи между фигурами S и S'.

По таблице 2 этот образ R_n определяется из символа; например ${}^5L_{2\cdot 2}$ — из 5 осей R_5 вычитаем по 2 на каждое составное вращение: $5 - 2 \times 2 = 1$, получая R_1, а в случае, например ${}^5P_{3\cdot 2}$ еще вычитаем 1 на отражение: $5 - 4 - 1 = 0$; имеем R_0.

Эти значения n для образа R_n или элемента симметрии каждой операции, указаны в таблице 2 под каждым термином в виде целых чисел слева.

§ 10. Вывод операций бесконечных систем фигур. В § 6 был намеренно допущен пропуск, а именно обобщение операций по признаку инвариантности было начато только с ${}^2L^m$. ^{01} в R_0 ничего не дает, но тождество ^{11} в R_1 (см. § 9) инвариантно относительно передвижения по R_1, т. е. его образ инвариантности есть R_1, следовательно, если мы выведем S_2' из совмещения с S_2 и передвинем по R_1 на отрезок b, то получим новую операцию; ее формула связи $x_1 = x_2 + b$, она инвариантна, ибо $a + x_1' = a + x_2' + b$ дает $x_1' = x_2' + b$; эта общая операция и есть поступание, а тождество есть частный случай поступания при $b = 0$.

Прибавляя к S_2 и S_2', связанным поступанием, точки y_1 и y_1 с одинаковыми знаками по оси y, получим поступание в плоскости, а прибавляя y_1 и $\bar{y}_1$ — скользящее отражение вдоль R_1.

В R_3 из поступания в R_2 получим поступание в R_3 и зеркальное скольжение вдоль R_2, а из скольжения вдоль R_1 — скольжение вдоль R_1

и винтовое движение или скользящее вращение вдоль оси R_1 2-го порядка, которое аналогично обобщается на любой порядок n.

Итак, из четырех элементов конечной симметрии R_3 только первые три имеют аналогов в бесконечной симметрии: $^3 1$ с образом инвариантности R_3 дает поступание, $^3 P$ с R_2 — скользящее отражение, $^3 L^m$ с R_1 — скользящее вращение, а $^3 P_n$ с образом в виде точки R_0 не может дать ничего. В R_4 аналогично выводится скользящее вдоль R_1 зеркальное вращение, в R_5 скользящее вдоль R_1 двувращение и т. д.

§ 11. Заключение. Симметрические операции одного пространства обладают, как известно, сочетательной связью и могут сочетаться между собой, так сказать, в горизонтальном направлении, в группы, образуя виды (классы) симметрии, конечные и бесконечные.

В вертикальном же направлении, при переходе к низшему или высшему пространству, симметрические операции обнаруживают особого рода генетическую связь, которая объединяет их в одну неразрывную систему.

Продольное и поперечное сечения элемента симметрии R_n плоским образом R_{n-1} вообще дает два разных элемента низшего пространства R_{n-1} и, обратно, достройка новой оси к элементу R_n и двух отрезков на ней с равными или разными знаками дает всегда два различных элемента высшего пространства R_{n+1}; эта связь позволяет произвести полный вывод возможных операций и дает более глубокие основания для выработки номенклатуры симметрических операций и символов элементов симметрии.

D. K. Motzok. Verbindung und Ableitung der möglichen Deckoperationen

Résumé

Eine digonale Achse L_2 mit einem Paar ihr entsprechender dreidimensionaler Figuren kann man mit einer Ebene auf zweierlei Art schneiden: wenn diese zu L_2 senkrecht steht, erhält man einen Punkt L_2 im zweidimensionalen Raume R_2; wenn die Schnittebene durch L_2 führt, erhält man eine Spiegelungsgerade P im R_2.

Umgekehrt lässt sich ein Element im R_n (P im R_2) in zwei verschiedene Elemente (P und L_2 im R_3) des höheren Raums R_{n+1} restaurieren und man kann also mehrdimensionale Operationen ableiten.

Es ist möglich die Gesamtheit der n gleichen einer Drehungsachse L_n entsprechenden Figuren um und parallel L_n zu drehen und zu versetzen ohne den Zusammenhang der Figuren zu ändern. Dieses Invariantprinzip gilt mutatis mutandis für alle Deckoperationen (wie z. B. Schraubenbewegung usw.) und umgekehrt jede in einem gewissen Sinne invariante Bewegung ist als eine Operation endlicher oder unendlicher Ordnung zu betrachten.