

УДК 539.125.523:550.835+543.426

О ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СОСТАВА НЕКОТОРЫХ ГОРНЫХ ПОРОД ПО ДАННЫМ ИЗМЕРЕНИЙ РЕНТГЕНО-ФЛУОРЕСЦЕНТНОГО АНАЛИЗА

© 2003 г. А. И. Хисамутдинов, М. А. Федорин

Представлено академиком А.С. Алексеевым 05.03.2003 г.

Поступило 26.03.2003 г.

1. Стандартные способы интерпретации данных измерений при проведении рентгено-флуоресцентного анализа (РФА) основываются на представлениях о решающей роли фотонов с малой кратностью рассеяния в пробе и вследствие этого на пренебрежении вкладов в измеряемые функционалы от фотонов более высокой кратности взаимодействия. В асимптотическом смысле, когда количество вещества пробы уменьшается, эти представления, безусловно, правильны. В реальности часто имеет место нарушение асимптотичности по той причине, что для реального анализа требуются достаточно большие количества вещества пробы. Среди существующих методов интерпретации измерений РФА следует выделить как наиболее обоснованный “способ фундаментальных параметров” [1, 2]. Отметим, что в этом способе ограничиваются рассмотрением двух актов рассеяния, а выбор начального приближения для итерационной процедуры, как правило, базируется на дополнительных измерениях образцов сравнения. В настоящей работе предлагается подход к решению задач восстановления концентраций, в котором нет ограничений по кратности взаимодействий, а также модельных упрощений, свойственных существующим методам. Для предлагаемого подхода характерны численное решение уравнения переноса и способ простой итерации для определения неизвестных концентраций. Физическая природа данного типа задач такова, что ряд Неймана для решения уравнения переноса является здесь “быстро сходящимся”; это способствует как быстрым расчетам прямой задачи, так и сходимости итерационных процессов. Аналогичный подход к решению некоторых других обратных задач ядерной геофизики применялся

ранее в [3, 4, 6]. Следует отметить, что задачи восстановления параметров характерны как для геофизики, так и для многих применений теории переноса (см., например, [8–10]).

2. Для описания РФА рассматриваем некоторую пространственную конфигурацию, включающую образец исследуемого вещества, а также источник первичного излучения и детектор, находящиеся вне образца. Пространство между этими объектами считается постоянной и известной средой (воздух, вакуум, гелий, держатели и т.д.). Образец, источник и детектор считаются расположенными внутри или на поверхности некоторой выпуклой ограниченной области, которую обозначим V_G ; $V_G \subset R^3$.

Считаем, что образец представляет собой гомогенное вещество с величиной объема V и полной массой m ; его геометрическая форма достаточно произвольна. Вещество образца состоит из набора K компонент с массовыми долями α_k (г/г), $k = 1, 2, \dots, K$. В качестве компонент могут рассматриваться как минералы с заданной химической формулой, так и отдельные химические элементы. Обозначим как $\bar{\alpha}$ столбец высоты K , элементами которого являются массовые доли α_k , $k = 1, 2, \dots, K$. Пусть L есть заданная матрица размера $(K - N) \times K$, $1 \leq N < K$, посредством которой задается система линейных уравнений связи между компонентами $\bar{\alpha}$,

$$L\bar{\alpha} = \bar{l}, \quad (1)$$

где \bar{l} – некоторый заданный вектор размерности $K - N$. Считается, что столбец $\bar{\alpha}$ принадлежат области \mathcal{A} ,

$$\mathcal{A} = \{ \bar{\alpha}: \alpha_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad L\bar{\alpha} = \bar{l} \}, \quad (2)$$

$$\mathcal{A} \subset R^K.$$

Институт геофизики
Сибирского отделения Российской Академии наук,
Новосибирск

Число уравнений связи в (2) больше или равно 1, $K - N \geq 1$. Считается, что в качестве первого уравнения в (1) всегда фигурирует следующее

$$\sum_{k=1}^K \alpha_k = 1. \quad (3)$$

Пусть ρ_j и c_j , $j = 1, 2, \dots, M$, есть числовые плотности (или объемные концентрации, см^{-3}) и массовые доли соответственно всех химических элементов, входящих в компоненты образца;

$$\rho_j = c_j \frac{1}{m_j} \bar{m}, \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad (4)$$

где m_j – атомная масса элемента j . Величины c_j и ρ_j полностью определяются значениями элементов столбца $\bar{\alpha}$,

$$c_j = H \bar{\alpha}|_j, \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad (5)$$

где H – заданная матрица размера $M \times K$, такая,

$$\text{что } \sum_{j=1}^M H_{jk} = 1, \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

Список химических элементов (1, 2, ..., M) мы разбиваем на две группы. К первой с номерами (1, 2, ..., N) относятся элементы, флуоресцентный отклик которых регистрируется при измерении. Вторая группа состоит из элементов с номерами ($N + 1, \dots, M$), чей флуоресцентный отклик не регистрируется. В соответствии с этим разбиением списки концентраций и массовых долей оказываются также разделенными на две группы. Будем обозначать как $\bar{\rho}$ и \bar{c} столбцы с компонентами (ρ_1, \dots, ρ_N) и (c_1, \dots, c_N) соответственно. Пусть M_ρ есть матрица размера $N \times N$, такая, что в соответствии с (4)

$$\bar{\rho} = M_\rho \bar{c}.$$

Мы предполагаем, что свойства рассматриваемой задачи и разбиение элементов на группы таковы, что все элементы $\bar{\alpha}$ единственным образом определяются по $\bar{\rho}$ (или \bar{c}) согласно следующей системе K уравнений:

$$M_\rho H_c \bar{\alpha} = \bar{\rho}, \quad L \bar{\alpha} = \bar{l}, \quad (6)$$

где H_c – матрица размера $N \times K$, составленная из первых N строк матрицы H . Вследствие этих определений $\bar{\alpha}$, $\bar{\rho}$ и \bar{c} выражаются друг через друга.

Нумерация элементов совокупности ρ_1, \dots, ρ_N назначается в порядке убывания атомных номеров химических элементов (самые “тяжелые” располагаются в начале списка). Элементы с большим атомным номером могут являться источниками возбуждения флуоресценции элементов с меньшим атомным номером, но не наоборот. Это свойство будет использовано в дальнейшем.

3. Рассмотрим уравнение переноса и сформулируем задачу количественного определения состава пробы как задачу восстановления параметров для уравнения переноса. Предварительно введем некоторые обозначения. Сразу заметим, что рассматривается стационарная задача. Пусть $X \equiv R^3 \otimes (\Omega_1) \otimes (0, E_0]$ – фазовое пространство координат, направлений и энергий фотонов, где $(\Omega_1) = \{\Omega: \Omega \in R^3, |\Omega| = 1\}$, $E_0 < +\infty$; $x \equiv (r, \Omega, E) \in X$; пусть $\Phi(x)$ – плотность потока излучения. Всюду далее область интегрирования не указывается, если она совпадает со всей областью интегрирования.

Обозначаем и предполагаем:

$G \equiv V_G \otimes (\Omega_1) \otimes (0, E_0]$, $G \subset X$; ∂V_G – граница V_G ; $\Sigma(r, E)$, $\Sigma^S(r, E)$ и $\Sigma^{PA}(r, E)$ – полные макроскопические сечения соответственно взаимодействий, рассеяний и поглощений квантов со средой; $\Sigma(r, E) = \Sigma^S(r, E) + \Sigma^{PA}(r, E)$, $\forall x \in G \quad \Sigma(x) < C_\Sigma < +\infty$; $C(\Omega', E' \rightarrow \Omega, E|r)$ – индикатриса рассеяния, $r \in V_G$;

\hat{S}_{tot} – интегральный оператор рассеяния (в точке r) с произведением $\Sigma^S(r, E) \cdot C(\Omega, E \rightarrow \Omega', E'|r)$ в качестве ядра, $\hat{S}_{\text{tot}} = \hat{S}_{\text{tot}}|_r$;

$q_0(r, \Omega, E)$ – заданная плотность источников излучения, $\int q_0(x) dx = 1$;

V – подобласть V_G , заключающая исследуемый образец; вне V все сечения Σ^S , Σ^{PA} , Σ и индикатриса рассеяния C считаются постоянными и известными;

в области $V \quad \forall i, i = 1, 2, \dots, M$, $\sigma_i^C(E)$, $\sigma_i^T(E)$, $\sigma_i^P(E)$, $\sigma_i^{PA}(E)$ и $\sigma_i^{PS}(E)$ ($\text{см}^2/\text{атом}$) – м и к р о с к о п и ч е с к и е сечения комптоновского рассеяния, томсоновского рассеяния, фотоэффекта, поглощения при фотоэффекте и рассеяния при фотоэффекте (“флуоресцентного рассеяния”) соответственно на одном атоме элемента i ; все микроскопические сечения предполагаются ограниченными;

$\forall i, i = 1, 2, \dots, N$, \hat{b}_i – интегральный оператор флуоресцентного рассеяния в V на одном атоме элемента i с дифференциальным сечением рассеяния в качестве ядра, $\hat{b}_i = \hat{b}_i|_r$; $\hat{B} = \sum_{i=1}^N \rho_i \hat{b}_i$ – интегральный оператор флуоресцентного рассеяния в V на всех атомах элементов с номерами $i = 1, 2, \dots, N$; полагаем, что \hat{b}_i есть нулевые операторы $\forall r \notin (V)$, $i = 1, 2, \dots, N$;

$\hat{S}_{\text{tot}} = \hat{S} + \hat{B}$ – представление оператора рассеяния в виде суммы, $\hat{S} = \hat{S}|_r$, $\hat{B} = \hat{B}|_r$, где считается, что \hat{B} есть тождественно нулевой оператор $\forall r \notin V$;

(S) – поверхность, на которой располагаются де-

текторы, $n_s = n_s(r)$ – нормаль к (S) в точке $r \in (S)$; не умаляя общности, считается, что $(S) \in \partial V_G$; $\mathcal{E}_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, N$, – совокупность заданных весовых функций, соответствующих участкам спектра, где регистрируются кванты, рожденные на элементе i в результате флуоресцентного рассеяния; считается, что весовые функции являются ограниченными кусочно-непрерывными функциями;

I_i – линейные функционалы от плотности $\Phi(r, \Omega, E) \cdot |(\Omega, n_s)|$, $i = 1, 2, \dots, N$, $|(\Omega, n_s)| \equiv \mu_s$,

$$I_i = \int_{(S)} dS \int dE \int \mu_s \Phi(r, \Omega, E) \mathcal{E}_i(r, \Omega, E) d\Omega \equiv (\mu_s \Phi, \mathcal{E}_i); \quad (7)$$

d_i , $i = 1, 2, \dots, N$, заданные результаты измерений функционалов I_i ; \bar{I} и \bar{d} – столбцы с компонентами I_i и d_i соответственно, $i = 1, 2, \dots, N$.

Плотность потока $\Phi(x)$ удовлетворяет уравнению переноса

$$(\Omega, \nabla_r \Phi(x)) + \Sigma(r, E) \Phi(x) = \hat{S}_{\text{tot}} \Phi(x) + q_0(x), \quad (8)$$

$$x \in G$$

и граничному условию

$$\Phi(r, \Omega, E) = 0, \quad r \in \partial V_G, \quad (\Omega, n) < 0, \quad (9)$$

где $n = n(r)$ – внешняя нормаль к границе ∂V_G в точке r .

В силу принятых предположений $\forall \bar{\alpha} \in \mathcal{A}$ решение задачи (8), (9) существует и единственно и представляется в форме сходящегося ряда Неймана; мы рассматриваем решение на множестве обобщенных плотностей, которое удовлетворяет интегральной форме уравнения переноса.

4. Для определения в пробе неизвестных $\bar{\rho}$ или $\bar{\alpha}$ осуществляется измерение значений функционалов \bar{I} и затем формируется система уравнений

$$\bar{I} = \bar{d}. \quad (10)$$

Обратную задачу РФА в широком смысле составляют уравнение переноса (8) с заданным граничным условием (9) и система (10); необходимо определять $\bar{\alpha}$ и поток $\Phi(r, \Omega, E)$.

Мы будем считать, что плотность $\Phi(\cdot)$ представлена в виде ряда Неймана, и далее это разложение подставлено в линейные функционалы \bar{I} . Тем самым все линейные функционалы I_i , $i = 1, 2, \dots, N$, оказываются функциями от $\bar{\alpha}$,

$$\bar{I}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{F}, \quad \mathcal{F} \subset R^N, \quad (11)$$

где через \mathcal{F} обозначено множество значений столбца функций \bar{I} . Считаем, что отображение

(11) является непрерывным и ограниченным. Мы сформулируем обратную задачу настоящей работы как задачу решения системы уравнений (10), считая при этом, что: (i) неизвестные $\bar{\alpha}$ принадлежат некоторому подмножеству \mathcal{A}_1 , $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$, (ii) сужение отображения (11) на \mathcal{A}_1 является гомеоморфизмом, и (iii) $\bar{d} \in \bar{I}(\mathcal{A}_1)$.

Введем эквивалентную формулировку обратной задачи, которая и будет далее рассматриваться. Предварительно обозначим: $\mathcal{U}_1 = M_\rho H_c(\mathcal{A}_1)$ или $\mathcal{U}_1 = \{\bar{\rho}: \bar{\rho} = M_\rho H_c \bar{\alpha}, \bar{\alpha} \in \mathcal{A}_1\}$. В этой формулировке переменные $\bar{\rho}$ рассматриваются как независимые; $\bar{\alpha}$ есть линейные функции от $\bar{\rho}$, а функционалы \bar{I} являются композициями функций или сложными функциями от $\bar{\rho}$. В обратной задаче необходимо определять $\bar{\rho} \in \mathcal{U}_1$ из систем уравнений (10), (6).

5. Мы строим далее метод типа “простой итерации”, в котором не требуется (трудоемкого) вычисления производных по неизвестным параметрам. Используя свойство линейности уравнения переноса, представим плотность потока $\Phi(x)$ в виде

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) + \sum_{i=1}^N \Phi_i(x), \quad (12)$$

где парциальная плотность потока $\Phi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, N$, описывает фотоны “ i -го типа”, появляющиеся в V в результате флуоресцентного рассеяния на элементе с номером i , $i = 1, 2, \dots, N$; если i -фотон испытал затем флуоресцентное рассеяние в V на элементе k , $k = i + 1, i + 2, \dots, N$, то он преобразуется в k -фотон. Фотоны “нулевого” типа с плотностью $\Phi_0(x)$ (“0-фотоны”) – это фотоны от источника, не испытавшие ни одного акта флуоресцентного рассеяния в V на элементах из списка $i = 1, 2, \dots, N$. Комptonовское и когерентное рассеяния типа фотона не изменяют; также не меняют тип фотона флуоресцентное рассеяние на элементах из списка ($j = N + 1, \dots, M$) и рассеяние вне V .

Справедливо следующее

Предложение. Плотности $\Phi_0(x)$ и $\Phi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, N$, удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} (\Omega, \nabla_r \Phi_0(r, \Omega, E)) + \Sigma(r, E) \Phi_0(r, \Omega, E) &= \\ &= \hat{S} \Phi_0(r, \Omega, E) + q_0(r, \Omega, E), \\ (\Omega, \nabla_r \Phi_i(r, \Omega, E)) + \Sigma(r, E) \Phi_i(r, \Omega, E) &= \\ &= \hat{S} \Phi_i(r, \Omega, E) + q_i(r, \Omega, E), \end{aligned} \quad (13)$$

$$q_i(r, \Omega, E) = \rho_i \hat{b}_i \sum_{\gamma=0}^{i-1} \Phi_\gamma(r, \Omega, E), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned}\Phi_i(r, \Omega, E) &= 0, \quad r \in \partial V_G, \\ (\Omega, n) &< 0, \quad i = 0, 1, \dots, N.\end{aligned}$$

Отметим следующие два факта. Если сложить все уравнения в (13) и выполнить соответствующие преобразования, то получим уравнение (8); то же имеет место и для граничных условий. Все уравнения в системе (13) могут быть записаны и в интегральной форме. Отметим также, что $\forall k, 1 \leq k \leq N, \Phi_k(x) = 0$, если $E > E_k^{(0)}$, где $E_k^{(0)}$ – максимальная энергия характеристического кванта, возникающего при флуоресцентном рассеянии на элементе k .

Функционалы I_i переписываются с учетом (12) как

$$I_i = I_i^{(0)} + \sum_{k=1}^i I_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (14)$$

где $I_i^{(0)} = (\mu_S \Phi_0, \mathcal{E}_i)$ и $I_{ik} = (\mathcal{E}_i, \mu_S \Phi_k)$ – вклады в функционал I_i от потока “0-фотонов” и от k -потока соответственно ($k = 1, 2, \dots, i$). Суммирование в (14) производится в диапазоне изменения индекса $k = 1, 2, \dots, i$, так как, напомним, фотоэффект – реакция пороговая. В силу свойства линейности уравнения переноса для каждой плотности $\Phi_k(\cdot)$, слагаемые I_{ik} в (14) есть $I_{ik} = O(\rho_k)$ при $\rho_k \rightarrow 0, 1 \leq k \leq i \leq N$. Обозначая теперь

$$a_{ik} = I_{ik}/\rho_k, \quad 1 \leq k \leq i \leq N, \quad (15)$$

представим (14) как

$$I_i = I_i^{(0)} + \sum_{k=1}^i a_{ik} \rho_k, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (16)$$

и далее перепишем систему (10) как

$$\bar{d} = \bar{I}^{(0)} + A\bar{\rho}, \quad (17)$$

где матрица A составлена из элементов a_{ik} и является матрицей треугольного вида; все ее элементы выше главной диагонали равны нулю. Отметим, что вычисление элементов матрицы a_{ik} и $I^{(0)}$ может быть выполнено на основе системы уравнений (13), например методом Монте-Карло, как в данной работе.

Важными атрибутами метода РФА являются такой выбор и назначение всех параметров источника и детекторов, что все элементы $a_{ii}, i = 1, 2, \dots, N$, не равны нулю. Считаем, что этот факт имеет место $\forall \bar{\alpha}$, поэтому $\det(A) \neq 0$, существует обратная матрица A^{-1} и система (17) может быть записана в форме

$$\bar{\rho} = A^{-1}(\bar{d} - \bar{I}^{(0)}). \quad (18)$$

Для решения систем уравнений (18) и (6) введем следующий итерационный процесс:

$$\bar{\rho}_{1s} = A_{1s-1}^{-1}(\bar{d} - \bar{I}_{1s-1}^{(0)}), \quad (19)$$

$$M_\rho H_c \bar{\alpha}_{1s} = \bar{\rho}_{1s}, \quad L \bar{\alpha}_{1s} = \bar{I}; \quad s = 1, 2, \dots$$

Начальное приближение $\bar{\alpha}_{10}$ считается заданным в \mathcal{A} и удовлетворяющим неравенству $\bar{I}^{(0)}(\bar{\alpha}^{(0)}) \leq \bar{d}$; кроме того, относительно $\bar{\alpha}_{10}$ предполагается, что соответствующий процесс если он сходится, то сходится к $\bar{\alpha}^* \in \mathcal{A}_1$ (и к $\bar{\rho}^* \in U_1$). Мы не производим в настоящей работе теоретический анализ вопросов сходимости в предложенном методе. Заметим лишь, что одно достаточное условие связано с близостью матрицы A и матрицы производных $\left\| \frac{\partial I_i}{\partial \rho_j} \right\|, 1 \leq i, j \leq N$; аналогичное условие рассматривалось в [11] в связи с методами в [3, 4, 6].

6. Для исследования свойств предложенного метода были выполнены различные численные эксперименты, которые подтвердили его эффективность. Далее описываются два характерных эксперимента. Расчеты были проведены по следующей схеме. Во-первых, для заданных значений минерального состава $\bar{\alpha}$ решалась “прямая” задача, т.е. вычислялись величины \bar{I} , которые затем служили в качестве измеренных величин \bar{d} . Во-вторых, задавалось достаточно произвольное начальное приближение $\bar{\alpha}_{10}$ и с использованием итерационного процесса (19) восстанавливались массовые доли $\bar{\alpha}$. В задаче I образец состоял из смеси трех порообразующих оксидов: Al_2O_3 , SiO_2 , Fe_2O_3 и карбоната CaCO_3 ($\alpha_1 = 0.25, \alpha_2 = 0.25, \alpha_3 = 0.25, \alpha_4 = 0.25$), “измерялись” (вычислялись) три функционала, соответствующие элементам Si, Ca и Fe. В задаче II был рассмотрен образец геологического стандарта байкальского ила БИЛ-1, его химический состав приведен в [5]. Восстанавливались концентрации $N = 24$ элементов, их перечень приведен на рис. 1; зависимыми считались компоненты $\text{SiO}_2, \text{Al}_2\text{O}_3$ с заданным уравнением связи (отношение концентраций этих компонент должно было соответствовать паспортному [5]). В обеих задачах конфигурации областей V_G и V и весовые функции (“детекторов”) $\mathcal{E}_i (i = 1, 2, \dots, N)$ соответствовали реальным энергодисперсионным РФА-приборам. Источник являлся точечным мононаправленным и моноэнергетическим, с энергиями $E_0 = 15$ кэВ и $E_0 = 44$ кэВ соответственно. Толщина образца выбиралась равной одной длине свободного пробега фотонов источника в веществе пробы.

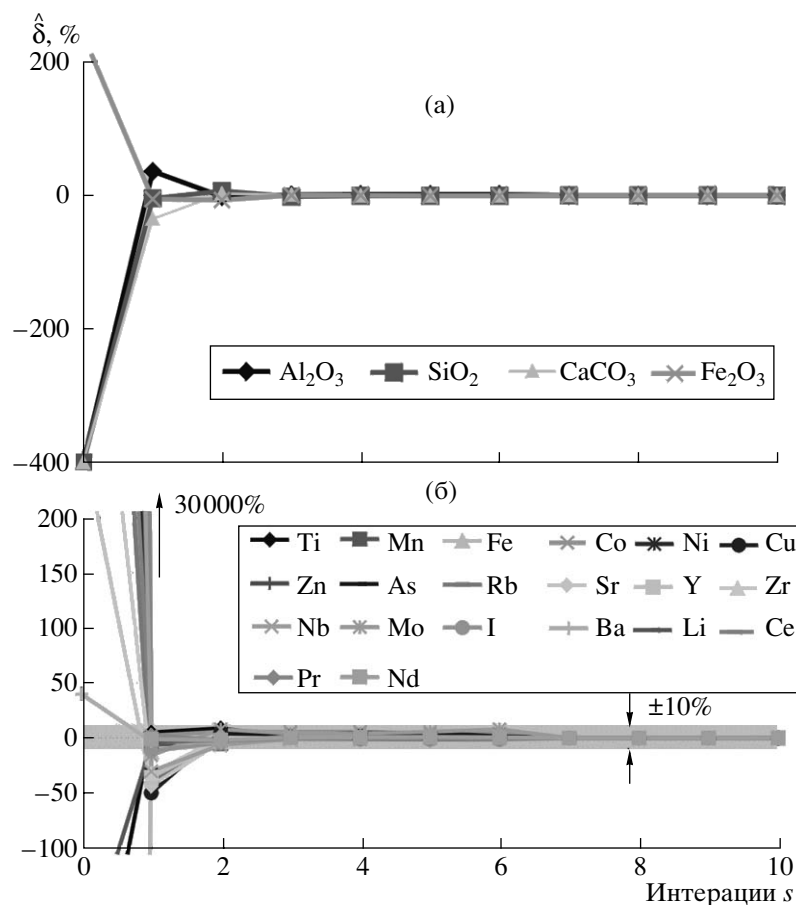


Рис. 1. Сходимость итерационного процесса для задачи I (а) и задачи II (б). Объяснения в тексте.

Функционалы $I_i^{(0)}$, I_{ik} и соответственно элементы матрицы A вычислялись методом Монте-Карло по одним и тем же траекториям. Использовались способы математических ожиданий и аналитического осреднения “по вылетам”. При реализации 80 тыс. траекторий достигалась стандартная относительная погрешность вычисления всех функционалов ($N = 24$ для задачи II) – примерно 5%. При этом время расчета на ЭВМ Pentium-II не превышало 3 мин. Для рассматриваемых численных экспериментов погрешность вычислений элементов матрицы A не превышала 1%.

На рис. 1 показано поведение итерационного процесса в обеих задачах. Мерой отклонения от точного решения служат величины $\hat{\delta}_{k|s} = 100\% \cdot (\alpha_{k|s} - \alpha_k) / \alpha_k$, $k = 1, 2, \dots, K$, $0 \leq s$. Как видно, имеет место достаточно быстрая сходимость. Уже с третьего итерационного шага восстановленные значения всех компонент совокупности $\bar{\alpha}$ попадают в некоторую окрестность точного решения, задаваемую стандартной погрешностью метода РФА ($\leq 5\%$), а затем стремятся к точному решению в пределах погрешности, соответствующей реше-

нию прямой задачи. Для разных компонент величины $\hat{\delta}_{k|0}$ составляли от 50 до тысяч процентов, что, однако, мало повлияло на характер сходимости. В эксперименте II все концентрации в $\bar{\alpha}_{10}$ были выбраны равными 10^{-3} , в то время как реальные величины $\bar{\alpha}$ для разных элементов лежали в диапазоне $10^{-5} - 10^{-1}$. В [7] проводилось также тестирование метода по отношению к погрешностям в экспериментальных данных, показавшее его устойчивость.

В заключение отметим, что особенность предложенного метода состоит в отсутствии ограничений на кратность взаимодействий, сложность геометрической конфигурации и энергетическое распределение квантов источника.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 00-01-00432).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахтияров А.В. Рентгеноспектральный флуоресцентный анализ в геологии и геохимии. Л.: Недра, 1985. 142 с.

2. *Ревенко А.Г.* Рентгеноспектральный флуоресцентный анализ природных материалов. Новосибирск: Наука, 1994. 263 с.
3. *Хисамутдинов А.И., Бланков Е.Б.* // ДАН. 1989. Т. 309. № 3. С. 587–590.
4. *Хисамутдинов А.И., Минбаев М.Т.* // Геология и геофизика. 1995. Т. 36. № 7. С. 73–86.
5. *Govindaraju K.* // Geostandards Newslett. 1994. V. 18. P. 1–158.
6. *Khisamutdinov A.I.* // Appl. Radiation and Isotopes. 1999. V. 50. P. 615–625.
7. *Хисамутдинов А.И., Федорин М.А.* О восстановлении концентраций некоторых химических элементов в горных породах по данным рентгенофлуоресцентного анализа. Препр. Ин-та геофизи-
ки СО РАН. № 1. Новосибирск: Изд-во СО РАН; филиал “ГЕО”, 2001. 33 с.
8. *Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назаралиев М.А. и др.* Методы Монте-Карло в атмосферной оптике. Новосибирск: Наука, 1976. 283 с.
9. *Марчук Г.И., Агошков В.И., Шутяев В.П.* Сопряженные уравнения и алгоритмы возмущений в нелинейных задачах математической физики. М.: Наука, 1991. 341 с.
10. *McCormick N.J.* // Nuclear Sci. and Eng. 1992. № 112. P. 185–198.
11. *Хисамутдинов А.И.* Задача об идентификации плотностей “активных” элементов для уравнений переноса. Препр. Ин-та математики СО РАН № 25. Новосибирск, 1996. 12 с.