

УДК 551.463+519.6

О БИФУРКАЦИИ МЕДЛЕННОЙ ВОЛНЫ БИО В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

© 2003 г. И. Я. Эдельман

Представлено академиком В.Н. Страховым 27.05.2002 г.

Поступило 07.06.2002 г.

Фундаментальная теория распространения упругих волн в изотропной однородной пористой среде, насыщенной жидкостью, разработана М. Био [1]. Было доказано, что в пористом материале, помимо быстрой продольной волны первого рода ($P1$) и поперечной волны (которые подобны соответствующим волнам в обычной упругой среде), существует также медленная продольная волна второго рода ($P2$) – медленная волна Био. Важной особенностью этой волны является то, что ее фазовая скорость всегда меньше, чем скорости продольных волн в жидкости и в упругом теле. С тех пор как существование волны Био было подтверждено экспериментально на ультразвуковых частотах в искусственном материале (водонасыщенном синтетическом стекле) [2], вопрос, почему волна второго рода не может быть обнаружена экспериментально на низких частотах в низкопроницаемых средах (например, в естественных горных породах), остается открытым [3]. Ответ на этот вопрос является важной геофизической задачей.

В настоящей работе представлено теоретическое обоснование экспериментальных фактов, свидетельствующих о том, что волна $P2$ не распространяется на низких частотах. Предметом работы является доказательство существования точки бифуркации – критического волнового числа k_{cr} волны Био такого, что при $k \leq k_{cr}$ волна является полностью затухающей (диффузионный режим [1]), а при $k > k_{cr}$ волна становится распространяющейся. Низкочастотный предел теории Био предполагает, что $P2$ -мода является сильно диссипативной ниже некоторого критического значения частоты, которое зависит от пористости скелета и от вязкости жидкости. Типичное значение критической частоты для водонасыщенной пористой среды проницаемостью 1 дарси имеет порядок 1–10 кГц [3]. Волна Био характеризуется

противонаправленным движением твердой и жидкой фаз, и это относительное движение значительно зависит от вязкости жидкой фазы и от проницаемости пористой среды. В настоящей работе показано, что критическое волновое число k_{cr} медленной волны Био действительно зависит от проницаемости среды и от вязкости жидкости. Отметим, что мы рассматриваем распространение упругих волн в безграничной среде и в отсутствие внешних сил. В этом случае необходимо определять частоту волны ω , которая может быть комплексной, как функцию действительного числа $k \in R^1$. В противоположность широко используемой модели Био, различные феноменологические параметры которой трудно или невозможно измерить, мы исследуем более простую математическую модель, предложенную К. Вильмански [4]. Эта модель, как и модель Био, доказывает существование трех типов объемных волн в безграничной пористой среде. Детальное сравнение моделей дано в [5].

Рассмотрим распространение упругих волн в безграничной области, заполненной насыщенной пористой средой. Система уравнений, описывающая пористую двухкомпонентную среду, имеет следующий вид ($x \in R^3, t \in [0, T]$) [4, 5].

Законы сохранения массы

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^F}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho^F \mathbf{v}^F) &= 0, \\ \frac{\partial \rho^S}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho^S \mathbf{v}^S) &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

здесь ρ – плотность, \mathbf{v} – вектор скорости, индексы F и S обозначают флюидную и твердую фазы соответственно.

Законы сохранения импульса

$$\begin{aligned} \rho^F \left[\frac{\partial}{\partial t} + \left(v_j^F, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right] v_i^F - \frac{\partial T_{ij}^F}{\partial x_j} + \pi(v_i^F - v_i^S) &= 0, \\ \rho^S \left[\frac{\partial}{\partial t} + \left(v_j^S, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right] v_i^S - \frac{\partial T_{ij}^S}{\partial x_j} - \pi(v_i^F - v_i^S) &= 0; \end{aligned} \quad (2)$$

Объединенный институт физики Земли
им. О.Ю. Шмидта
Российской Академии наук, Москва

здесь положительная константа $\pi = \frac{\mu^f}{\mathcal{K}}$, μ^f – вязкость жидкости, \mathcal{K} – проницаемость пористой среды, \mathbf{T}^F и \mathbf{T}^S – тензоры напряжений:

$$\mathbf{T}^F = -p^E \mathbf{1} - \beta \Delta_n \mathbf{1}, \quad p^F = p_0^F + \kappa(\rho^E - \rho_0^F), \quad (3)$$

$$\mathbf{T}^S = \mathbf{T}_0^S + \lambda^S \operatorname{div} \mathbf{u}^S \mathbf{1} + 2\mu^S \operatorname{symgrad} \mathbf{u}^S + \beta \Delta_n \mathbf{1}, \quad (4)$$

где p^F – поровое давление, p_0^F и ρ_0^F – начальные значения порового давления и плотности жидкости, κ – постоянный коэффициент сжимаемости жидкости, $\Delta_n = n - n_E$ – изменение пористости, β – коэффициент взаимодействия фаз, \mathbf{T}_0^S – постоянное начальное значение тензора напряжений в скелете, λ^S и μ^S – константы Ламе и \mathbf{u}^S – вектор смещений твердой фазы: $\mathbf{v}^S = \frac{\partial \mathbf{u}^S}{\partial t}$.

Уравнение баланса пористости

$$\frac{\partial \Delta_n}{\partial t} + \left(v_i^S, \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \Delta_n + n_E \operatorname{div}(\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S) = -\frac{\Delta_n}{\tau}, \quad (5)$$

где τ – постоянное время релаксации пористости.

БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ И ПАРАМЕТРЫ

Введем следующие безразмерные переменные и параметры [5]:

$$\hat{\rho}^F = \frac{\rho^F}{\rho_0^F}, \quad \hat{\rho}^S = \frac{\rho^S}{\rho_0^S},$$

$$\hat{\mathbf{v}}^F = \frac{\mathbf{v}^F}{U_{\parallel}^F}, \quad \hat{\mathbf{v}}^S = \frac{\mathbf{v}^S}{U_{\parallel}^S},$$

где ρ_0^S – начальное значение плотности скелета и $U_{\parallel}^S = \sqrt{\frac{\lambda^S + 2\mu^S}{\rho_0^S}}$ – скорость продольной волны в упругой среде. Также

$$\hat{x} = \frac{x}{U_{\parallel}^S \tau}, \quad \hat{t} = \frac{t}{\tau}, \quad \hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{U_{\parallel}^S \tau},$$

$$\hat{p}^F = \frac{p^F}{\rho_0^S (U_{\parallel}^S)^2}, \quad \hat{\kappa} = \frac{\kappa}{(U_{\parallel}^S)^2},$$

$$\hat{\pi} = \frac{\pi \tau}{\rho_0^S}, \quad \hat{\beta} = \frac{\beta}{\rho_0^S (U_{\parallel}^S)^2}, \quad \hat{\lambda}^S = \frac{\lambda^S}{\rho_0^S (U_{\parallel}^S)^2},$$

$$\hat{\mu}^S = \frac{\mu^S}{\rho_0^S (U_{\parallel}^S)^2}, \quad \hat{\alpha} = \alpha U_{\parallel}^S.$$

После замены переменных и параметров система (1)–(5) сохраняет свой вид, кроме правой части уравнения (5), где получаем $-\Delta_n$. Далее мы опускаем символ “ \wedge ”, характеризующий безразмерные величины.

ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ.

Исследуем распространение объемных волн в пористой среде. Мы ограничимся рассмотрением одномерной задачи, т.е. изучением только продольных волн. В этом случае система (1)–(5) имеет вид (здесь мы положили $\beta = 0$ [5] и ввели тензор деформаций e^S [6]):

$$\frac{\partial \rho^F}{\partial t} + \frac{\partial(\rho^F v^F)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho^S}{\partial t} + \frac{\partial(\rho^S v^S)}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

$$\rho^F \left[\frac{\partial}{\partial t} + \left(v^F, \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] v^F + \frac{\kappa \partial \rho^F}{\partial x} + \pi(v^F - v^S) = 0, \quad (7)$$

$$\rho^S \left[\frac{\partial}{\partial t} + \left(v^S, \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] v^S - (\lambda^S + 2\mu^S) \frac{\partial e^S}{\partial x} - \pi(v^F - v^S) = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial e^S}{\partial t} = \frac{\partial v^S}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Delta_n}{\partial t} + \left(v^S, \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta_n + \frac{n_E \partial(v^F - v^S)}{\partial x} = -\Delta_n. \quad (9)$$

Рассмотрим распространение гармонических волн с частотой ω и волновым числом k . Введем следующие безразмерные параметры: $\hat{\omega} = \omega \tau$ и $\hat{k} = k U_{\parallel}^S \tau$ (символ “ \wedge ” далее опускается). Подставляя в систему (6)–(9) решения в виде

$$\rho^F - \rho_0^F = R^F \exp(i(kx - \omega t)),$$

$$\rho^S - \rho_0^S = R^S \exp(i(kx - \omega t)),$$

$$v^F = V^F \exp(i(kx - \omega t)),$$

$$v^S = V^S \exp(i(kx - \omega t)),$$

$$e^S = E \exp(i(kx - \omega t)),$$

$$\Delta_n = D \exp(i(kx - \omega t)),$$

получаем систему алгебраических уравнений для неизвестных амплитуд R^F, R^S, V^F, V^S, E и D . Условие вырождения детерминанта этой системы приводит к дисперсионному уравнению для продольных волн

$$r(\omega^2 - c_f^2 k^2)(\omega^2 - k^2) + i\omega \pi((1+r)\omega^2 - k^2(1+rc_f^2)) = 0, \quad (11)$$

где $r = \frac{\rho_0^F}{\rho_0^S}$, $c_f = \frac{U^F}{U_{||}^S}$ и $U^F = \sqrt{k}$ – скорость звука в жидкости. Напомним, что подобно [5–7] мы вычисляем частоту волны ω как функцию действительного числа $k \in R^1$. Поэтому $\text{Re}\omega/k$ определяет фазовую скорость волны, а $\text{Im}\omega$ определяет ее затухание. Наша цель – доказать, что решение $\omega_{P2}(k)$ уравнения (11), соответствующее волне Био, приводит к бифуркации. Она имеет место в критической точке k_{cr} (точки бифуркации), в малой окрестности которой решение $\omega_{P2}(k)$ распадается на несколько ветвей.

БИФУРКАЦИЯ МЕДЛЕННОЙ ВОЛНЫ БИО

Перепишем уравнение (11) в виде

$$r(\tilde{\omega}^2 - c_f^2)(\tilde{\omega}^2 - 1) + i\tilde{\omega}\frac{1}{k}((1+r)\tilde{\omega}^2 - (1+rc_f^2)) = 0, \quad (12)$$

где $\tilde{\omega} = \frac{\omega}{k}$ и $\tilde{k} = \frac{k}{\pi}$. Очевидно, в случае $k \gg 1$ (высокочастотный предел) уравнение (12) имеет корни (заметим, что здесь $\frac{1}{k} \ll 1$ – малый параметр)

$$\tilde{\omega}_{P1} = \pm 1 - \frac{i}{2\tilde{k}} \mp \frac{4+r-rc_f^2}{8r(1-c_f^2)}\frac{1}{\tilde{k}^2} + O\left(\frac{1}{\tilde{k}^3}\right), \quad (13)$$

$$\tilde{\omega}_{P2} = \pm c_f - \frac{i}{2r\tilde{k}} - \frac{1-c_f^2(1+4r)}{8r^2(1-c_f^2)(\pm c_f)}\frac{1}{\tilde{k}^2} + O\left(\frac{1}{\tilde{k}^3}\right), \quad (14)$$

которые определяют скорости и затухания прямых и обратных продольных волн первого и второго рода. Очевидно, что в высокочастотном пределе фазовые скорости волн $P1$ и $P2$ не зависят от ω .

Далее рассмотрим низкочастотный диапазон, где $k \ll 1$ и, следовательно, $\tilde{k} \ll 1$. Решения уравнения (12) будем искать в виде

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0 + \tilde{k}\tilde{\omega}_1 + \tilde{k}^2\tilde{\omega}_2 + \dots \quad (15)$$

Для прямой и обратной продольной волны первого рода имеем

$$\tilde{\omega}_{P1} = \pm \sqrt{\frac{1+rc_f^2}{1+r}} - \tilde{k} \frac{ir(1-c_f^2)^2}{2(1+rc_f^2)(1+r)^2} \pm \tilde{k}^2 \sqrt{\frac{1+r}{1+rc_f^2}} \times \frac{r^2(1-c_f^2)^3(2(1-r)(1+rc_f^2)+1-c_f^2)}{8(1+r)^4(1+rc_f^2)^2} + O(\tilde{k}^3). \quad (16)$$

Однако для волны второго рода построение асимптотического решения для соответствующего корня уравнения (12) является гораздо более сложным. Далее докажем, что существует некоторое критическое значение волнового числа k_{cr} , ниже которого волна $P2$ не распространяется. Поэтому асимптотическое разложение этого корня имеет различную структуру в зависимости от того, меньше или больше волновое число волны $P2$ критического значения k_{cr} . Представляя (15) в (12), для прямой волны $P2$ получаем

$$\tilde{\omega}_{P2}^f = -i \frac{rc_f^2}{1+rc_f^2} \tilde{k} - i \frac{r^3 c_f^4 (1+rc_f^4)}{(1+rc_f^2)^2} \tilde{k}^3 + O(\tilde{k}^4). \quad (17)$$

Решение для обратной волны второго рода ищем в виде

$$\tilde{\omega} = \frac{\tilde{\omega}_0}{\tilde{k}} + \tilde{\omega}_1 + \tilde{k}\tilde{\omega}_2 + \dots, \quad (18)$$

что приводит к разложению

$$\tilde{\omega}_{P2}^b = -i \frac{1+r}{r} \frac{1}{\tilde{k}} + i \frac{r(r+c_f)}{(1+r)^2} \tilde{k} + O(\tilde{k}^2). \quad (19)$$

Очевидно, разложения (17) и (19) включают только мнимые члены. Это означает, что фазовая скорость волны $P2$ равна нулю, т.е. мода полностью затухает. Однако эти разложения справедливы, только если волновое число k меньше, чем k_{cr} . Другими словами, существует точка бифуркации k_{cr} , в малой окрестности которой решение уравнения (11) распадается на несколько ветвей. Докажем это утверждение. Нетрудно заметить, что точное решение уравнения (11) для волны Био имеет вид

$$k^2 = \left(r\omega^2(1+c_f^2) + i\pi\omega(1+rc_f^2) + \frac{1}{2rc_f^2} \sqrt{r^2\omega^4(1-c_f^2)^2 - \pi^2\omega^2(1+rc_f^2)^2 + 2ir\pi\omega^3(1-c_f^2)(1-rc_f^2)} \right). \quad (20)$$

Утверждение. Существует некоторое критическое значение волнового числа $k_{cr} \in R^+$ такое, что:

а) если $0 < k < k_{cr}$, то уравнение (20) имеет два чисто мнимых корня $\omega_1(k)$ и $\omega_2(k)$, $\text{Re}\omega_j(k) = 0, j = 1, 2$;

б) если $k = k_{cr}$, то уравнение (20) имеет один кратный чисто мнимый корень, т.е. $\omega_1(k) = \omega_2(k)$, $\text{Re}\omega_j(k) = 0, j = 1, 2$;

в) если $k > k_{cr}$, то уравнение (20) не имеет чисто мнимых корней.

Доказательство. После замены $\omega = -i\pi\Omega$, $\Omega \geq 0$, уравнение (20) принимает вид

$$F_1(\Omega) = F_2(\Omega), \tag{21}$$

$$F_1(\Omega) = \Omega \sqrt{\Omega^2 r^2 (1 - c_f^2)^2 - 2r\Omega(1 - c_f^2)(1 - rc_f^2) + (1 + rc_f^2)^2}, \tag{22}$$

$$F_2(\Omega) = 2rc_f^2 \tilde{k}^2 + \Omega^2 r(1 + c_f^2) - \Omega(1 + rc_f^2). \tag{23}$$

Отметим, что функция под квадратным корнем

$$g(\Omega) = \Omega^2 r^2 (1 - c_f^2)^2 - 2r\Omega(1 - c_f^2)(1 - rc_f^2) + (1 + rc_f^2)^2$$

всегда положительна. Рассмотрим уравнение (21). Сначала исследуем поведение функций $F_1(\Omega)$, $F_2(\Omega)$ при $\Omega \rightarrow \infty$. Очевидно,

$$\frac{F_1(\Omega)}{\Omega^2} \sim r(1 - c_f^2) \text{ и } \frac{F_2(\Omega)}{\Omega^2} \sim r(1 + c_f^2), \tag{24}$$

т.е. $F_2(\Omega)$ круче, чем $F_1(\Omega)$. Следовательно, если $\tilde{k} = 0$, то функция $(F_2 - F_1)(\Omega)$ имеет два действительных корня: $\Omega = 0$ и Ω_* , так что $(F_2 - F_1)(\Omega) < 0$ при $\Omega \in (0, \Omega_*)$. Далее вычислим стационарные точки для $F_1(\Omega)$ и $F_2(\Omega)$ и точки перегиба для $F_1(\Omega)$. Легко проверить, что функция $F_1(\Omega)$ имеет

две стационарные точки $\Omega_1^{(1)} \approx \frac{1 + (1 + 7r)c_f^2}{2r}$ и $\Omega_1^{(2)} \approx \frac{1 + (1 - 5r)c_f^2}{r}$ и функция $F_2(\Omega)$ имеет одну

стационарную точку $\Omega_2 = \frac{1 + rc_f^2}{2r(1 + c_f^2)}$, причем $\Omega_2 <$

$< \Omega_1^{(1)} < \Omega_1^{(2)}$. Функция $F_1(\Omega)$ имеет единственную точку перегиба

$$\Omega_{\text{inf}} \approx \frac{1 - rc_f^2 - \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{r} \sqrt[3]{c_f^2} (1 - \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{r} \sqrt[3]{c_f^2})}{r(1 - c_f^2)} \tag{25}$$

такую, что $\Omega_1^{(1)} < \Omega_{\text{inf}} < \Omega_1^{(2)}$, и $F_1(\Omega)$ выпукла при $\Omega < \Omega_{\text{inf}}$ и $F_1(\Omega)$ вогнута при $\Omega > \Omega_{\text{inf}}$. Приведенный анализ позволяет нам заключить, что существует единственная точка пересечения функций $F_1(\Omega)$ и $F_2(\Omega)$ (рис. 1). Следовательно, учитывая, что

$F_1'(\Omega) = F_2'(\Omega)$, можно определить точку пересечения, т.е. критическое значение Ω_{cr} :

$$\Omega_{cr} \approx \frac{1}{2r} + 2c_f^2(1 + 3rc_f^2 - 2c_f^2), \tag{26}$$

которое всегда является положительным в силу физического смысла. Соответствующее критическое значение k_{cr} определяется из уравнения (21):

$$\tilde{k}_{cr} \approx c_f \left(1 + \frac{1}{2rc_f^2} \right), \text{ т.е. } k_{cr} \approx c_f \left(1 + \frac{1}{2rc_f^2} \right) \pi. \tag{27}$$

Таким образом доказано, что существует действительное критическое значение волнового числа k_{cr} , при котором уравнение (20) имеет один кратный мнимый корень $\omega_{cr} = -i\pi\Omega_{cr}$. Далее докажем, что если $k < k_{cr}$, то (20) имеет два мнимых корня, а если $k > k_{cr}$, то у уравнения (20) нет мнимых корней. Рассмотрим разложения

$$k = k_{cr}(1 \pm \epsilon k_1 \pm \epsilon^2 k^2 + \dots), \tag{28}$$

$$\omega = \omega_{cr} + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots,$$

где ϵ – любой малый параметр. Подстановка (28) в (20) приводит к уравнению бифуркации. Из при-

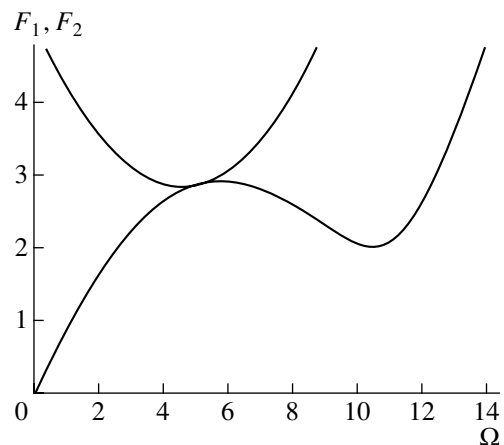


Рис. 1. Пример: $r = 0.1, c_f = 0.3, \tilde{k} = \tilde{k}_{cr} = 16.97$.

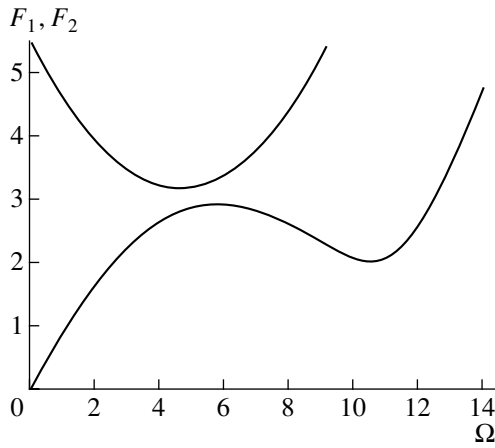


Рис. 2. Пример: $r = 0.1$, $c_f = 0.3$, $\tilde{k} = 17.5 > \tilde{k}_{cr}$.

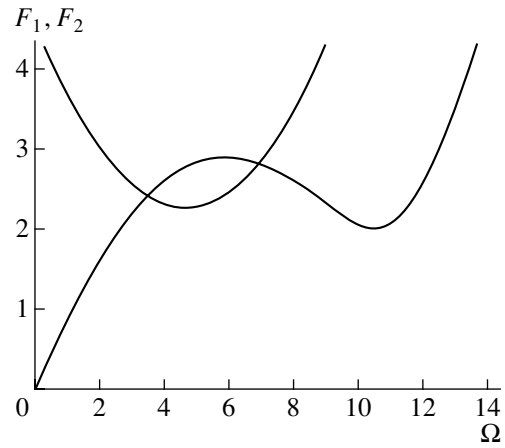


Рис. 3. Пример: $r = 0.1$, $c_f = 0.3$, $\tilde{k} = 16.0 < \tilde{k}_{cr}$.

ближения порядка $O(\epsilon)$ следует, что $k_1 = 0$. Из следующего приближения порядка $O(\epsilon^2)$ получаем:

$$\pm k_2 = \frac{\mathcal{A}\omega_1^2}{4k_{cr}^2}, \quad (29)$$

$$\mathcal{A} = \frac{1 + c_f^2}{c_f^2} - \frac{1 - c_f^2}{c_f^2 g(\Omega_{cr}) \sqrt{g(\Omega_{cr})}} \times \\ \times (r^3(1 - c_f^2)^3 \Omega_{cr}^3 - 3r^2(1 - c_f^2)^2(1 - rc_f^2)\Omega_{cr}^2 + \\ + 3r(1 - c_f^2)(1 + r^2 c_f^4)\Omega_{cr} - (1 - rc_f^2)(1 + rc_f^2)^2) > 0.$$

Очевидно, что для заданного $k_2 > 0$ уравнение (29) имеет два действительных решения для ω_1 , если в левой части выбирается знак плюс. Это означает, что рассматривается разложение $k = k_{cr}(1 + \epsilon^2 k_2 + \dots)$ и $k > k_{cr}$. Следовательно, уравнение (21) не имеет решений (рис. 2). Наоборот, если $k = k_{cr}(1 - \epsilon^2 k_2 + \dots) < k_{cr}$, то для заданного $k_2 > 0$ уравнение (29), так же как и уравнения (20), (21), имеет два мнимых корня (рис. 3).

Итак, волна второго рода полностью затухает, если ее волновое число $k \leq k_{cr}$. Если $k > k_{cr}$, то волна $P2$ распространяется с частотой

$$\omega_{p2} = \omega_{cr} + \epsilon \omega_1 + O(\epsilon^2), \\ \omega_1 = 2k_{cr} \sqrt{\frac{k_2}{\mathcal{A}}}. \quad (30)$$

Следовательно, фазовые скорости прямой и обратной медленной волны Био равны $\pm \frac{\text{Re}(\omega_{p2})}{k}$, где $k = k_{cr}(1 + \epsilon^2 k_2) + O(\epsilon^3)$.

ПРИМЕР

Из (27) очевидно, что k_{cr} зависит от параметра π . Соответствующая критическая длина волны прямо пропорциональна проницаемости \mathcal{H} . Вычислим критическое значение длины волны для следующих типичных значений параметров [8]: $\rho_0^S = 0.2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\rho_0^S = 2.0 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $U^F = 0.9 \cdot 10^3 \text{ м/с}$, $U_{||}^S = 3.0 \cdot 10^3 \text{ м/с}$, т.е. $r = 0.1$ и $c_f = 0.3$, как на рис. 1–3. Также $\tau = 4 \cdot 10^{-6} \text{ с}$. При $\pi = 10^9 \text{ кг/м}^3 \cdot \text{с}$, $\pi = 10^8 \text{ кг/м}^3 \cdot \text{с}$ и $\pi = 10^7 \text{ кг/м}^3 \cdot \text{с}$ критическая длина волны равна соответственно 0.22 см, 2.22 см и 22.21 см. Критическая частота для $\pi = 10^9 \text{ кг/м}^3 \cdot \text{с}$ (водонасыщенный материал проницаемостью $\mathcal{H} \sim 1$ дарси) имеет порядок 20 кГц. Таким образом, медленная волна Био становится распространяющейся при достаточно малых длинах волн, и, следовательно, она не может быть зарегистрирована в низкочастотном сейсмическом диапазоне (1–100 Гц).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Biot M.A. // J. Acoust. Soc. Amer. 1956. № 28. P. 168–186.
2. Plona T.J. // Appl. Phys. Lett. 1980. № 36(4). P. 259–261.
3. Nagy P.B. Acoustics and Ultrasonics. Experimental Methods in the Physical Sciences. N.Y.: Acad. Press, 1999. P. 161–221.
4. Wilmanski K. // Arch. Mech. 1993. № 48(4). P. 591–628.
5. Edelman I., Wilmanski K. // Continuum Mech. and Thermodyn. 2002. № 14(1). P. 25–44.
6. Edelman I. On the Bifurcation of the Biot Slow Wave in a Porous Medium. Prepr. WIAS № 738. B. 2002.
7. Эдельман И. // ДАН. 2001. Т. 379. № 2. С. 200–204.
8. Bourbie T., Coussy O., Zinsner B. Acoustics of Porous Media. P.: Editions Technip, 1987.