

УДК 550.831.017

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ БЫСТРОГО ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИРАЗВЕДКИ

© 2004 г. А. С. Долгаль

Представлено академиком Г.С. Голицыным 14.04.2004 г.

Поступило 29.03.2004 г.

Аппроксимация реального распределения физических неоднородностей геологической среды набором тел правильной геометрической формы является необходимым этапом при аналитическом решении прямой задачи гравirazведки [1, 2, 8]. Одна из широко используемых аппроксимационных стратегий базируется на плотном заполнении моделируемых геологических тел прямоугольными призмами, которые соприкасаются боковыми гранями, но не пересекаются друг с другом. В рамках данной стратегии сравнительно легко выполняется геометризация весьма сложных типов природных распределений масс [2, 5]. При некотором удалении точки расчета поля от призмы допускается использование приближенных выражений для определения аномального эффекта. Это позволяет существенно ускорить процесс вычислений, практически не ухудшая точность решения прямой задачи [6]. Однако полностью избежать ограничений, связанных с размерностью решаемых задач при моделировании сложных геологических сред, пока не представляется возможным.

При решении прямых задач большой размерности крайне важно оптимизировать количество аппроксимирующих прямоугольных призм при сохранении требуемой точности ε описания геологических границ, т.е. добиться выполнения условия [1]:

$$\left\| V - \sum_{i=1}^N \tilde{V}_i \right\|_{L_2} \leq \varepsilon, \quad (1)$$

где V – объем моделируемого геологического тела; \tilde{V}_i – объем i -й призмы, $i = 1, 2, \dots, N$, при минимальном количестве призм N . Для этой цели предлагается использовать быстрое вейвлет-преобразование – FWT (Fast Wavelet Transform), называемое также алгоритмом Малла (Mallat algorithm) [4].

Принцип FWT заключается в том, что для задания грубого образа сигнала $f(x)$ служит скейлинг-функция

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_k h_k \varphi(2x - k),$$

где k – целые числа, а уточнение этого образа происходит с помощью вейвлет-функции:

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_k g_k \psi(2x - k).$$

Базисные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ представляют собой ортонормированные масштабируемые функции с компактным носителем (всплески), перемещаемые по оси x и легко адаптирующиеся к локальным особенностям сигнала. Рекурсивное использование процедуры свертки сигнала с коэффициентами h_k и g_k происходит с уменьшением количества отсчетов в 2 раза при переходе от одного уровня (масштаба) j к другому $j + 1$.

Таким образом, происходит отображение сигнала из области его задания в семейство замкнутых вложенных подпространств $V_j \subset V_{j+1} \subset V_{j+2} \subset \dots$, элементами которых являются ортогональные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

$$f(x) = \sum_k s_{j_n, k} \varphi_{j_n, k} + \sum_{j < j_n} \sum_k d_{j, k} \psi_{j, k}, \quad (2)$$

где $s_{j_n, k}$, $d_{j, k}$ – вейвлет-коэффициенты, j_n – заданный уровень разложения сигнала. Аппроксимирующие вейвлет-коэффициенты определяются по итерационной формуле

$$s_{j+1, k} = \sum_m h_m s_{j, 2k+m},$$

детализирующие коэффициенты – по формуле

$$d_{j+1, k} = \sum_m g_m s_{j, 2k+m},$$

Горный институт
Уральского отделения Российской Академии наук,
Пермь

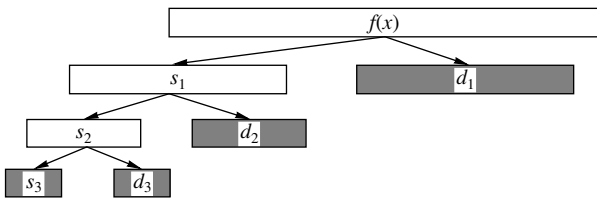


Рис. 1. Структура представления сигнала при быстром вейвлет-преобразовании (заштрихованы коэффициенты, используемые при реконструкции сигнала).

при этом вся информация о сигнале $f(x)$ сохраняется в наборе коэффициентов $s_{j,n,k}$ и $\sum_{j=0}^{j_n} d_{j,k}$ (рис. 1).

Для приближенного восстановления сигнала $f_\delta(x)$ в формуле (2) целесообразно отбросить некоторое количество n_0 сравнительно малых коэффициентов $d_{j,k}$, удовлетворяющих условию $|d_{j,k}| \leq \delta$. При этом точность восстановления сигнала в метрике L_2 будет определяться выражением

$$\|f(x) - f_\delta(x)\| < \delta \sqrt{n_0}.$$

Установлено, что вейвлет-коэффициенты существенно отличаются от нуля только вблизи сингулярностей $f(x)$, т.е. вейвлет-ряды (2) обычных функций допускают сильное “разрежение”. По этой причине обработка сигнала с помощью FWT позволяет существенножать объем информации, отбросить мелкие детали и выделить его наиболее существенные особенности [3].

В качестве базисных функций будем рассматривать функции Хаара

$$\varphi(x) = \theta(x)\theta(1-x),$$

$$\psi(x) = \theta(x)\theta(1-2x) - \theta(2x-1)\theta(1-x),$$

где $\theta(x)$ – функция Хевисайда ($\theta(x) = 0$ при $x < 0$, $\theta(x) = 1$ при $x \geq 0$), а условия на границах имеют вид

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(1) = 0,$$

$$\psi(0) = 1, \quad \psi(0.5) = -1, \quad \psi(1) = 0.$$

Двумерный базис FWT, необходимый для решения прямой задачи гравиметрии от объемной модели геологической среды, формируется путем тензорного произведения функций одномерного базиса, в частности, для так называемого нестандартного базиса [7] используется единственная скейлинг-функция

$$\varphi_{0,0}^0(x, y) = \varphi\varphi(x, y)$$

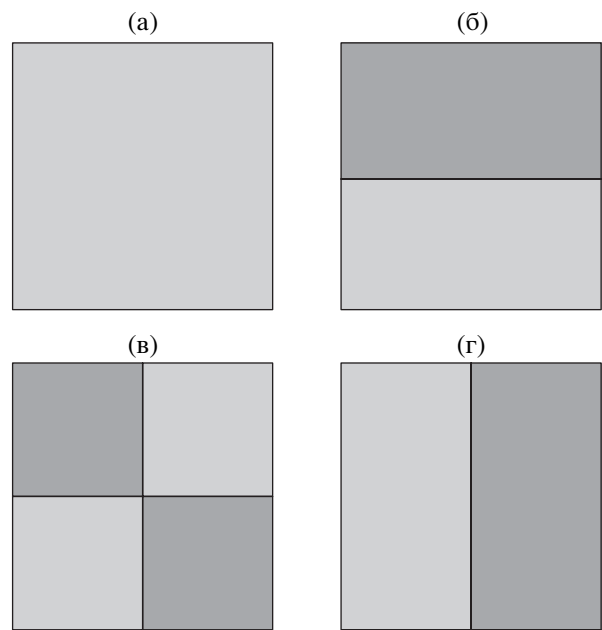


Рис. 2. Нестандартные базисные функции Хаара: $\psi_{0,0}^0$ (а), $\varphi\psi_{k,l}^j$ (б), $\psi\psi_{k,l}^j$ (в), $\varphi\psi_{k,l}^j$ (г) (светлые участки отвечают значениям функций +1, темные участки – значениям -1).

и три вейвлета

$$\varphi\psi_{k,l}^j = 2^j\varphi\psi(2^jx - k, 2^jy - l),$$

$$\psi\varphi_{k,l}^j = 2^j\psi\varphi(2^jx - k, 2^jy - l),$$

$$\psi\psi_{k,l}^j = 2^j\psi(x)\psi(y)(2^jx - k, 2^jy - l),$$

где j – уровень разложения; k, l – горизонтальный и вертикальный сдвиги соответственно (рис. 2).

Двумерное FWT с базисными функциями Хаара $\varphi_{0,0}^0, \varphi\psi_{k,l}^j, \psi\varphi_{k,l}^j, \psi\psi_{k,l}^j$ можно рассматривать как кусочно-призматическое представление некоторой геологической границы (например, структурной поверхности, заданной в виде матрицы глубин $\mathbf{H} = \{h_{ij}\}$ в узлах равномерной сети точек). Количество прямоугольных призм при фиксированной точности ϵ описания поверхности (1) зависит от значений вейвлет-коэффициентов $d_{j,k}$, большинство которых обычно оказываются пренебрежимо малыми по модулю. На данной основе можно конструировать весьма технологичные алгоритмы решения прямых задач гравиразведки большой размерности, ускоряющие вычислительный процесс в десятки и сотни раз.

Рассмотрим пример практического использования FWT для разрежения сети высот цифровой модели местности (ЦММ). Матрица высот рельефа местности для одной из нефтеперспективных площадей Западного Урала имеет размер 256 строк, 256 столбцов, перепад высот составляет

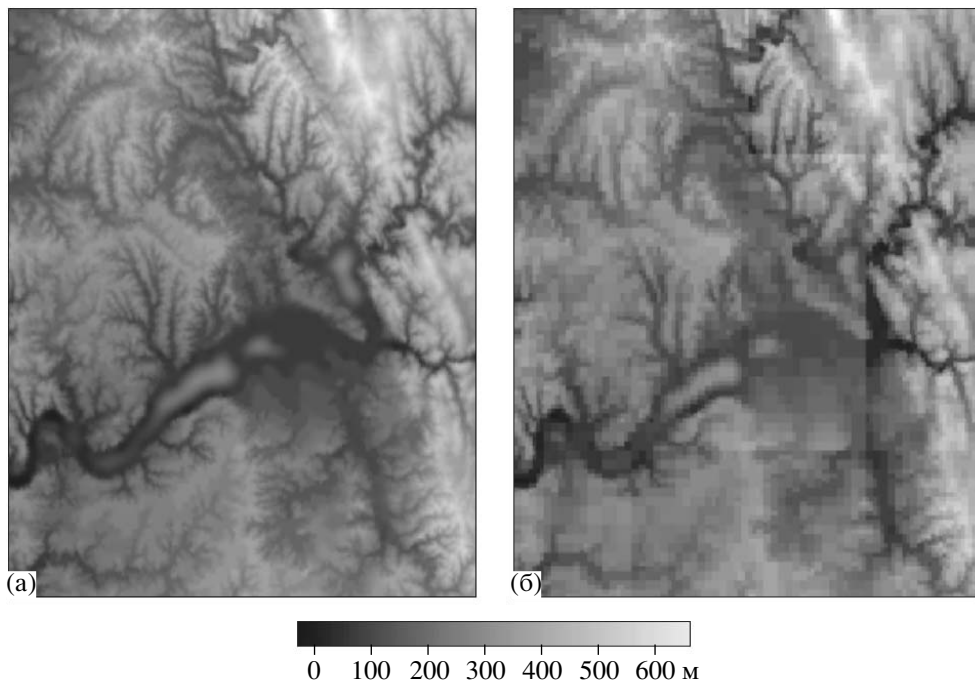


Рис. 3. Сжатие информации о рельефе земной поверхности: а – исходная ЦММ рельефа (65536 значений высотных отметок); б – ЦММ, построенная с использованием быстрого вейвлет-преобразования (5171 значение высотных отметок).

418 м при среднем значении 220.6 м и среднеквадратическом отклонении ± 61.4 м. В результате применения FWT установлено, что с использованием всего лишь 8% исходной информации поверхность рельефа может быть восстановлена с погрешностью ± 22.7 м (т.е. для ее описания достаточно не $256 \times 256 = 65536$, а всего 5171 призма). Соответственно, более чем в 10 раз повышается скорость решения прямой задачи гравиразведки от упрощенной ЦММ, сохраняющей все основные особенности рельефа (рис. 3).

Быстрое вейвлет-преобразование для оптимизации кусочно-призматической аппроксимации геологических объектов также может успешно применяться при решении прямых задач в ряде других геофизических методов (например, в магниторазведке, в электроразведке методом заряда и т.д.). Особой эффективностью FWT будет обладать при включении его в итерационные алгоритмы метода подбора, базирующиеся на многократном решении прямой задачи от последовательно уточняющихся моделей геологического строения исследуемых территорий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голыздра Г.Я.* Региональная, разведочная и промысловая геофизика. М.: ВИЭМС, 1977. 98 с.
2. *Гольдимиidt В.И.* Оптимизация процесса количественной интерпретации данных гравиразведки. М.: Недра, 1984. 184 с.
3. *Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А.* // УФН. 2001. Т. 171. № 3. С. 465–501.
4. *Дьяконов В.П.* Вейвлеты. От теории к практике. М.: СОЛОН_Р, 2002. 448 с.
5. *Матусевич А.В.* Объемное моделирование геологических структур на ЭВМ. М.: Недра, 1988. 184 с.
6. Результаты применения моделирования в рудной геофизике в различных районах Сибири / Под ред. В.С. Моисеева, Г.Г. Ремпеля. М.: Недра, 1988. 219 с.
7. *Столиц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д.* Вейвлеты в компьютерной графике. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2002. 272 с.
8. *Страхов В.Н., Лучицкий А.И.* // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1980. № 10. С. 48–64.