

УДК 556.53(571.52)

© Ю.А. Калуш, В.М. Логинов, С.А. Чупикова

Ю.А. Калуш, В.М. Логинов, С.А. Чупикова

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЙ ГИС ПРИ АНАЛИЗЕ ФРАКТАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РЕЧНОЙ СЕТИ ТУВЫ

Введение и постановка задачи

Водные ресурсы являются основой жизни, социального и экономического благополучия территории. Оценка их состояния и использования требует анализа большого объёма разносторонней информации. Геоинформационные системы (ГИС) представляют эффективный инструментарий для систематизации, хранения, актуализации и совместного анализа пространственно распределённых данных. Прогресс вычислительной техники и информационных технологий позволяют создавать на основе ГИС адекватные математические модели исследуемых природных объектов и систем. В настоящей статье рассматривается применение ГИС для анализа фрактальных особенностей геометрии речной сети Республики Тыва.

Тува обладает чрезвычайно разветвленной речной сетью. Это связано с тем, что территория Тувы является преимущественно горной – 82% её занимают горы и только 18% приходится на долю пониженных и выровненных элементов рельефа. В

Туве имеется более 8 тысяч рек, в том числе, одна из крупнейших рек Сибири и мира – Енисей. Речные бассейны почти целиком принадлежит Енисею, и лишь ряд небольших рек на юге относятся к бассейну озера Убсу-Нур, замыкающего северную окраину Котловины Больших Озёр. Речная сеть наиболее развита в горных районах и слабее на равнинных участках. Для характеристики речной сети используется ряд морфометрических параметров, таких как протяжённость, густота речной сети и т.п. [1]. Густота речной сети определяется отношением

$$\gamma_F = \frac{\Sigma L}{F}, \text{ где } \Sigma L \text{ – суммарная длина системы, } F \text{ –}$$

площадь водосбора. Коэффициент густоты определяется в основном климатическими условиями. В Туве в горных районах γ_F составляет $\gamma_F = 0,5\text{--}0,6 \text{ км}/\text{км}^2$, а в засушливых степных котловинах резко снижается до $\gamma_F = 0,1 \text{ км}/\text{км}^2$ [2].

На рис. 1 представлена электронная карта речной сети Тувы в масштабе 1:1000000. Видимая

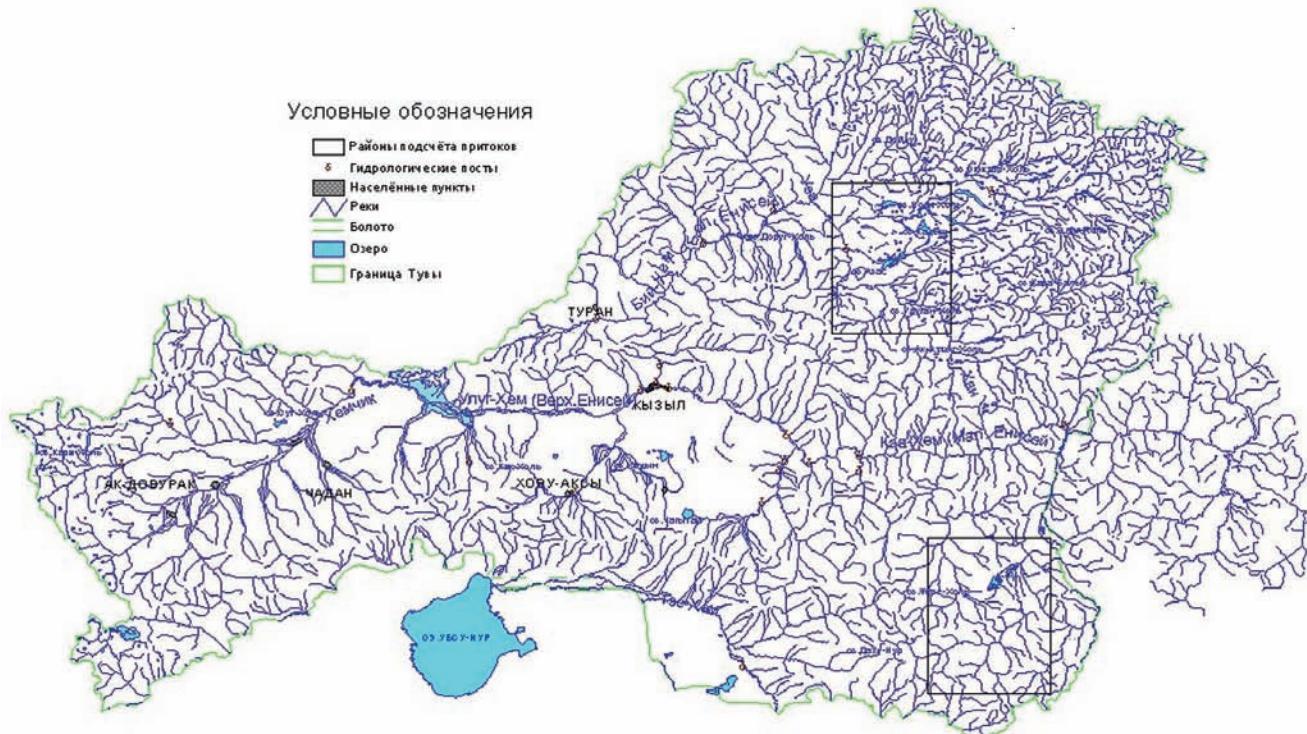


Рис.1. Гидрографическая сеть и пункты наблюдений за гидрологическим режимом

разветвленность речной сети указывает на возможность использования, в соответствии с современными представлениями, теорию фракталов [3, 4]. Эта теория с успехом применяется для описания и моделирования самых разнообразных природных процессов и систем, таких как речные системы, береговые линии рек, озёр и морей, процессов облакообразования, минерализации, роста деревьев, колебаний уровня подземных вод, формирования разломной тектоники, и т.д. [5-9]. Основным свойством фрактальных объектов является самоподобие, т.е. подобие части объекта целому объекту при изменении масштаба, а также характеризуются дробными значениями размерности [3]. Важную роль анализ фрактальности приобретает в картографии, например, при решении задач выбора объектов генерализации [10].

Ниже показывается, что использование технологий ГИС для анализа фрактальной геометрии на примере речной сети Тувы расширяет возможности, в том числе морфометрического подхода.

Содержание статьи следующее: – в п. 1 кратко излагаются характеристики созданной в Тувинском институте комплексного освоения природных ресурсов СО РАН (ТИКОРП СО РАН) ГИС «Гидроэнергетические ресурсы Республики Тыва» [11] и её новые дополнительные возможности. В п. 2 с помощью ГИС вычисляется фрактальный показатель речных бассейнов по соотношению «длина русла – площадь водосбора» (далее просто – длина – площадь). В п. 3 фрактальный показатель вычисляется на основе модификации ёмкостного (клеточного) метода. Здесь же приведены результаты вычисления фрактальных показателей для левосторонних и правосторонних притоков бассейнов рек Бий-Хем, Каа-Хем и Хемчик – основного притока Улуг-Хема на территории Тувы. Введено понятие коэффициента фрактальной асимметрии. В параграфе 4 для вычисления фрактальных показателей речных бассейнов Тувы используется еще один подход, основанный на применении ГИС и теории порядка рек Хортона. Решается важная для практики обратная задача определения показателя длины через фрактальную размерность. В п. 5 проводится сравнительный анализ показателей фрактальной размерности рассчитанный тремя способами.

1. Краткие характеристики применяемой ГИС

В ТИКОРП СО РАН на основе программных продуктов «ArcInfo» и «ArcView» разрабатываются геоинформационные системы для анализа и прогноза состояния различных природных объектов и систем Тувы. В рамках ГИС «Гидроэнергетические ресурсы Республики Тыва» [11] создана серия элек-

тронных карт масштабов 1:1000000 и 1:100000. Их топографическая основа – полистная электронная карта Республики Тыва масштаба 1:1000000, созданная Роскартографией в формате F1M, преобразованная во внутренние форматы PC ArcInfo, ArcView GIS (ArcView GIS, 1996) с последующей проверкой топологии, ошибок оцифровки, склейкой листов и актуализации данных. Для создания новых электронных карт масштаба 1:100000 использовались топографические карты, изданные Восточно-Сибирским аэро-геодезическим предприятием ГУГК СССР составленные по картам масштаба 1:50000 (материалы съёмок 1959, 65 гг. исправленным по карте масштаба 1:50000 обновлённым в 1987 г., 89 г. Состояние местности 1987 г. Издание 1993 г.

Графическая информация в банке данных ГИС представлена в формате векторных ARC-покрытий и шейп-файлов ESRI (*.shp). Описательная (атрибутивная) информация для картографических объектов организована в виде иерархически связанных таблиц (в формате DBASE – *.dbf и MS Excel – *.xls).

В созданную ранее ГИС [11] были внесены дополнения в виде деления слоёв по порядкам рек. Электронная карта гидрографической сети, выполненная в виде ряда слоёв, разделяется в зависимости от длины речного русла. Такое разделение даёт возможность быстрого определения числа рек, длины интересующего участка и суммарную протяжённость речной сети. Следующая серия созданных слоёв – бассейны рек. Дополнительно создан слой, в котором оцифрованы бассейны от точки подсчёта фрактальной размерности до истока реки. И слои бассейнов от створов водомерных постов, на которых велись режимные наблюдения до истока этих рек. Слои разделены по величине бассейнов и выполнены в виде полигональных объектов, что даёт возможность наглядно представить их форму и размеры, а также оперативно определить их площадь.

2. Определение фрактальной размерности рек из соотношения «длина русла – площадь водосбора»

В ряде работ было показано, что между длиной русла и площадью водосбора существует линейная зависимость [3], если эти величины отложить в логарифмическом масштабе. Угловой коэффициент полученной прямой определяет фрактальный показатель геометрии речной сети. Эта линейная зависимость эквивалентна следующему выражению между длиной реки L и площадью ее бассейна S :

$$L = aS^{D/2}, \quad (1)$$

где a – некоторый числовой параметр, а D – показатель фрактальной размерности речной сети. Для рек северо-востока США Хэк [3] установил, что $a = 1,4$; а показатель фрактальной размерности $D = 1,2$. Ко-

эффективенты, входящие в зависимость (1) не являются универсальными и для разных речных систем они отличаются друг от друга. Формула (1) может быть переписана в виде:

$$\log_{10}L = A + B \log_{10}S, \quad (2)$$

где $A = \log_{10}a$ и $B = D/2$. Полученное уравнение представляет собой линейную регрессию, отображающую связь между величинами L и S .

Используя электронную карту Тувы (масштаб 1:1000000) и геоинформационную систему «AcrInfo» и «ArcView», мы определили длины и площади бассейнов рек, Бий-Хем, Кая-Хем и Хемчик. Бий-Хем и Кая-Хем – образующие Енисей притоки, а река Хемчик является наибольшим притоком Енисея в Улуг-Хемской котловине. Для расчета использовалась площадь бассейна водной системы от точки впадения притока в основное русло реки и вверх по течению вплоть до его истока. Длина реки и площадь водосбора определяли по электронной карте. Использование последней существенно упрощает (в сравнении с традиционно применяемыми в гидрологии методами измерений, с помощью циркуля-измерителя, курвиметра и палеток при измерении площадей) определение числа рек, суммарной длины их водотоков и площадей бассейнов. Расчет проводился по схеме, изложенной в монографии [3]. Результаты расчётов представлены на рис. 2–4 точками. По оси абсцисс отложены значения логарифма площади, по оси ординат логарифмы длины водотоков. Из рисунков видно, что точки с высокой точностью ложатся на прямые вида (2). Определяя, тангенс угла наклона прямой находим величину фрактального показателя D .

На рис. 2 представлен график зависимости площади бассейна Бий-Хема (Большого Енисея) от длины реки в логарифмическом масштабе. Расчет коэффициентов линейной регрессии (2) дает $A = -0,37$, $B = 0,61$ и, соответственно, $D = 1,22$ и $a = 0,43$. Коэф-

фициент корреляции R , характеризующий линейность связи между логарифмами площади и длины равен $R = 0,994$, т.е. практически совпадает с 1. Разброс точек относительно прямой линейной регрессии невелик и определяется дисперсией равной 0,04.

На рис. 3 показан график зависимости площади бассейна Кая-Хема (Малого Енисея) от длины реки в том же логарифмическом масштабе. Река Кая-Хем второй, образующий Улуг-Хем приток, он менее водоносен, но имеет большую, чем Бий-Хем длину и берет свое начало на территории Монголии, где носит название Гунаин-Гол. Для бассейна Кая-Хема параметры уравнения линейной регрессии такие: $A = 0,131$; $B = 0,57$; $D = 1,14$; $a = 1,35$, при этом коэффициент корреляции $R = 0,995$, а дисперсия 0,033.

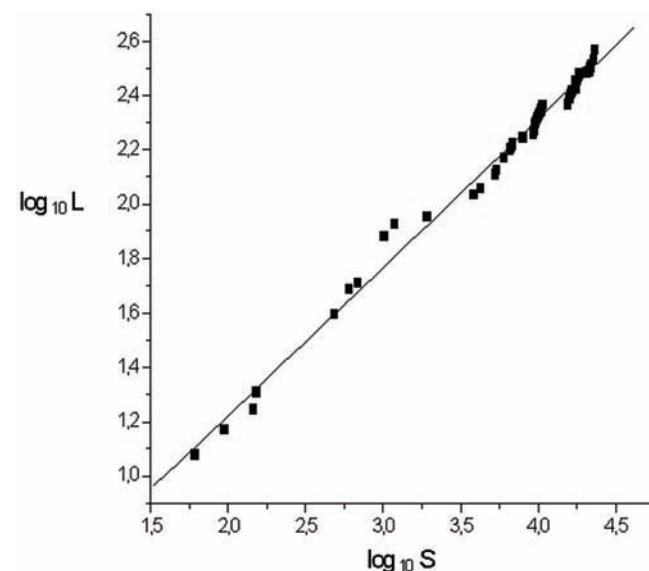


Рис. 3. Зависимость длины р. Кая-Хем (по Гунаин-Гол) от площади бассейна

На рис. 4 приведены данные расчета для бассейна реки Хемчик. Для этого бассейна: $A = 0,081$;

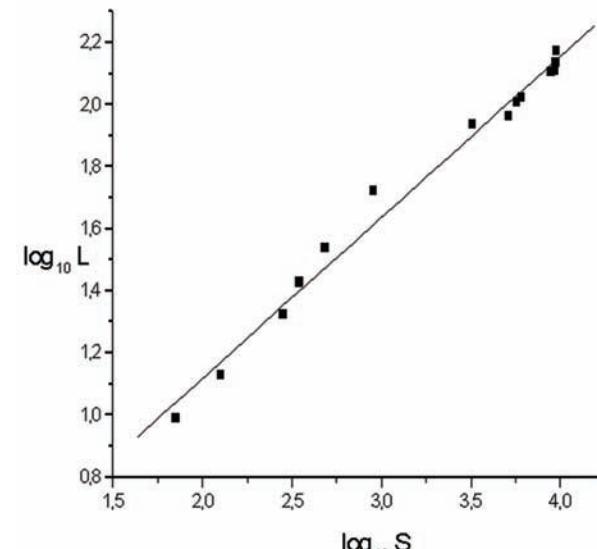


Рис. 4. Зависимость длины р. Хемчик от площади бассейна

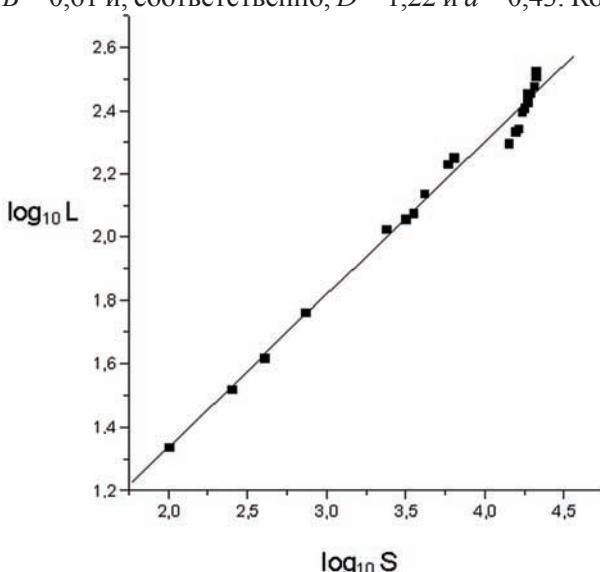


Рис. 2. Зависимость длины реки р. Бий-Хем от площади бассейна

$B = 0,56$; и соответственно $D = 1,12$; $a = 1,21$, коэффициент корреляции $R = 0,993$, а дисперсия 0,05.

Представленные выше результаты расчета зависимости длины L от площади водосбора S рек Бий-Хем, Кая-Хем и притока Хемчик в логарифмическом масштабе практически точно ложатся на уравнение линейной регрессии (2) с коэффициентом корреляции R незначительно отличающегося от 1 ($R = 0,94 - 0,99$). Полученные значения фрактальной размерности речных бассейнов Бий-Хема, Каа-Хема и Хемчика равны соответственно 1,22, 1,14 и 1,12, т.е. больше топологической размерности линии, но меньше топологической размерности плоскости и по величине согласуется с результатами Хека [3].

3. Определение фрактальной размерности речной сети модифицированным клеточным методом

Стандартный алгоритм подсчёта фрактальной размерности кривой заключается в том, что она покрывается множеством квадратов со стороной δ , подсчитывается число квадратов, покрывающих кривую – $N(\delta)$, затем процесс повторяется для меньшего δ . При $\delta \rightarrow 0$ асимптотически в пределе при $\delta \rightarrow 0$ [3]:

$$N(\delta) = \frac{1}{\delta^D}. \quad (3)$$

Фрактальная размерность D кривой определяется как угловой коэффициент графика функции $\log N(\delta)$ от $\log \delta$. Для построения графика нужно произвести подсчёт количества клеток $N(\delta)$ хотя бы для двух различных значений δ . Фрактальная размерность имеет локальный характер и определена для достаточно малых значений δ [3].

Мы использовали модифицированный подход, суть которого заключается в следующем. Представим себе, что вокруг кривой, фрактальную размерность которой мы хотим определить, описан квадрат. Покроем кривую ячейками со стороной δ , продлив построение на весь описывающий квадрат, как это показано на рис. 5. Обозначим через N_L – число ячеек (синего цвета), покрывающих кривую, а через N_R – число ячеек (красного цвета), покрывающих сторону квадрата. Согласно [3]:

$$\begin{aligned} N_L(\delta) &= \frac{1}{\delta^{D_k}}, \\ N_R(\delta) &= \frac{1}{\delta^{D_k}}, \end{aligned} \quad (4)$$

где D фрактальная размерность кривой, $D_k \equiv 1$ – «фрактальная» размерность стороны квадрата, описывающего рассматриваемую кривую. Из (4) имеем:

$$D \log \delta = -\log N_L, D_k \log \delta = -\log N_R.$$

Так как $D > 0$, то:

$$\frac{1}{D} \log N_L = \frac{1}{D_k} \log N_R,$$

и так как $D_k = 1$ получаем:

$$D = \frac{\log N_L}{\log N_R} \quad (5).$$

Вернее, $D \approx \frac{\log N_L}{\log N_R}$, а предел достигается

при $\delta \rightarrow 0$.

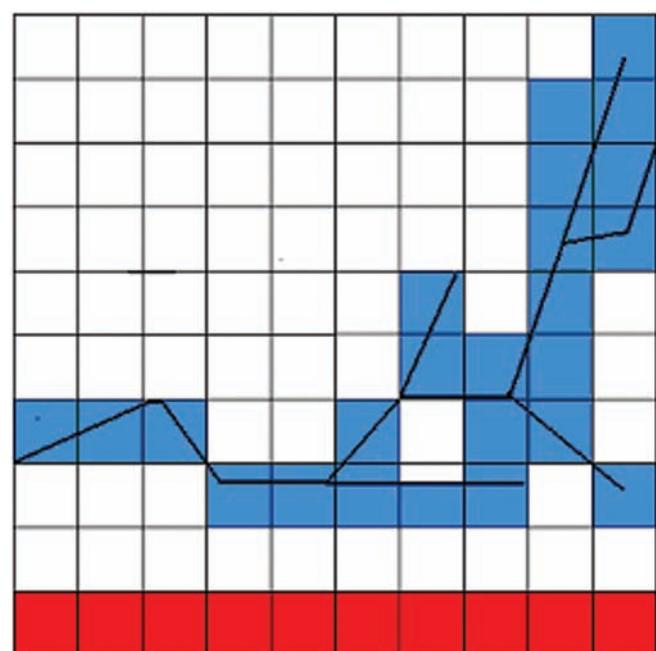


Рис. 5.

Далее используем результат (5) и ГИС для определения показателя фрактальной размерности речной сети Тувы. Полигон, содержащий, речную сеть разбивается на квадраты размером 1×1 метр, затем определяется число квадратов, накрывающих речную сеть, и вычисляется по формуле (5) фрактальный показатель D . При этом расчёт проводится без учета ширины русла, то есть речная сеть рассматривается, как множество кривых на плоскости.

Для расчёта фрактальных показателей речной сети этим методом нами была создана программа FracRivers v.1.0, написанная на языке FOXPRO-6.0. Программа использует электронные карты речной сети, оцифрованные с топографических карт и содержащие координаты кривых, преобразованные в текстовый формат.

Окно программы FracRivers v.1.0 представлено на рис. 6.

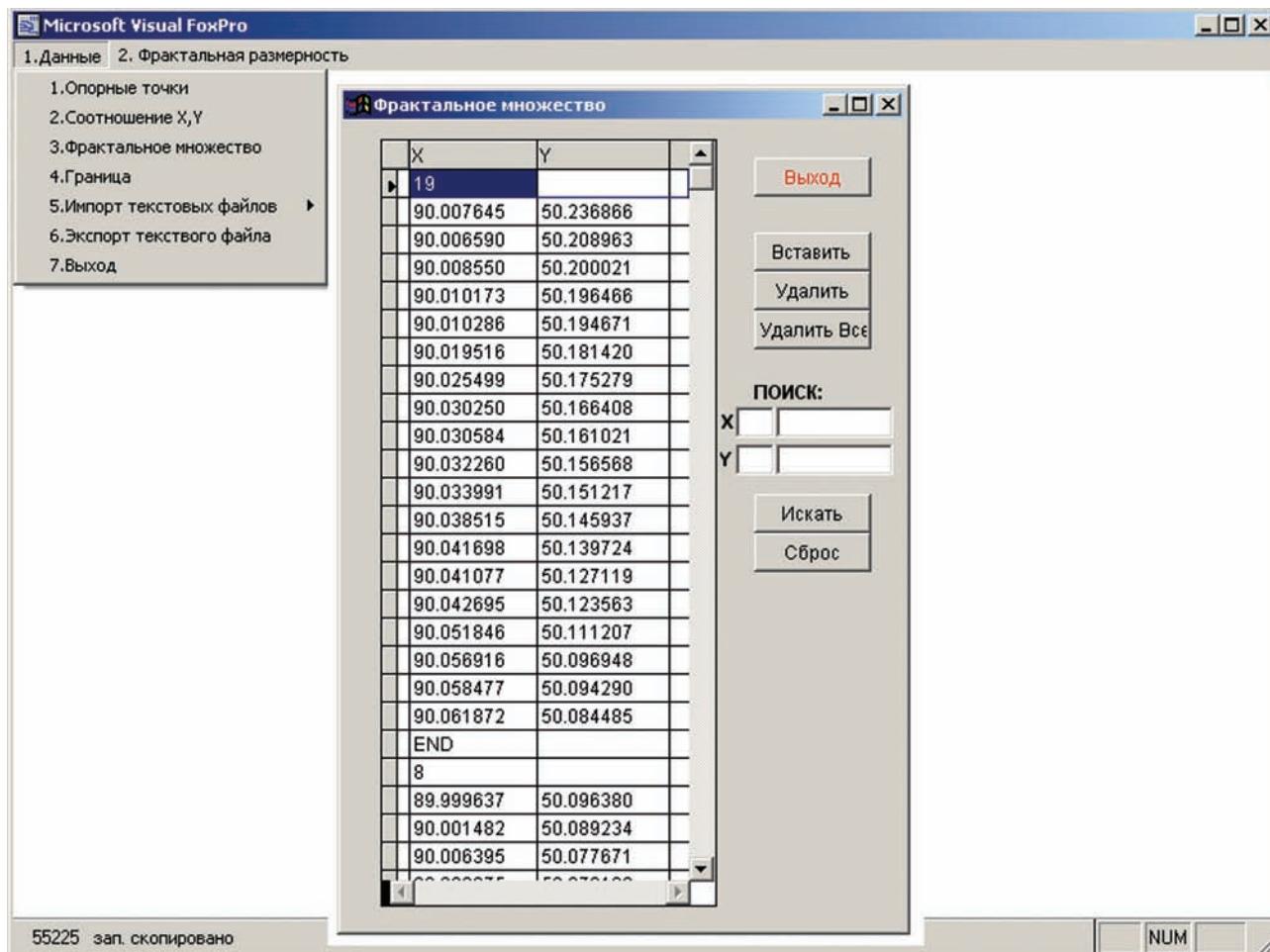


Рис. 6. Интерфейс программы FracRivers v.1.0

Содержание выплывающего меню «Данные»:

«Опорные точки» – вводятся координаты левой нижней и правой верхней точек интересующего полигона.

«Соотношение X, Y» – коэффициенты выравнивания для координат по x, y.

«Фрактальное множество» – содержит координаты кривых в текстовом формате.

«Граница» – координаты граничных точек интересующего участка.

«Импорт текстовых файлов» – импортирует данные, расположенные в *.txt файлах в программу.

«Экспорт текстового файла» – сохраняет обработанные файлы в нужном каталоге.

«Выход» – выход из программы.

В диалоговом окне «Данные» выбираем «Импорт текстовых файлов» и получаем доступ к файлам с координатами кривых. В меню «Фрактальная размерность» после активизации кнопки «Счёт», происходит отображение множества кривых и подсчёт показателя фрактальной размерности этого множества.

Изображение экрана программы с результатами подсчётов показано на рис. 7. Показатель фрак-

тальной размерности для речной системы Бий-Хем $D = 1,25$, Кaa-Хем (по Гунаин-Гол), $D = 1,24$ и для реки Хемчик $D = 1,23$. Оценка точности вычисления составляет $\pm 0,01$.

Остановимся вкратце на определении значения показателя D для лево и правосторонних притоков бассейнов рек Бий-Хем, Кaa-Хем и Хемчик. Отличие показателей для лево и правосторонних притоков будет указывать на асимметрию процесса формирования речных бассейнов. Вопрос симметрии природных объектов и систем играет важную роль при построении адекватных математических моделей. Применительно к задачам географии вопросы симметрии обсуждались в обзоре [12].

Приведём результаты расчётов фрактального показателя D , по методике, изложенной в настоящем параграфе. Значение фрактальной размерности левых притоков Бий-Хема $D_l = 1,17$, а правых $D_n = 1,23$ (рис. 8-9) для бассейна Кaa-Хем, наоборот – левых притоков $D_l = 1,23$, а для правых – $D_n = 1,17$. «Ось» симметрии бассейнов рек Кaa-Хем и Бий-Хем проходит по хребту Академика Обручева. Значение показателя фрактальной размерности правых и левых притоков реки Хемчик $D_l = D_n = 1,18$.

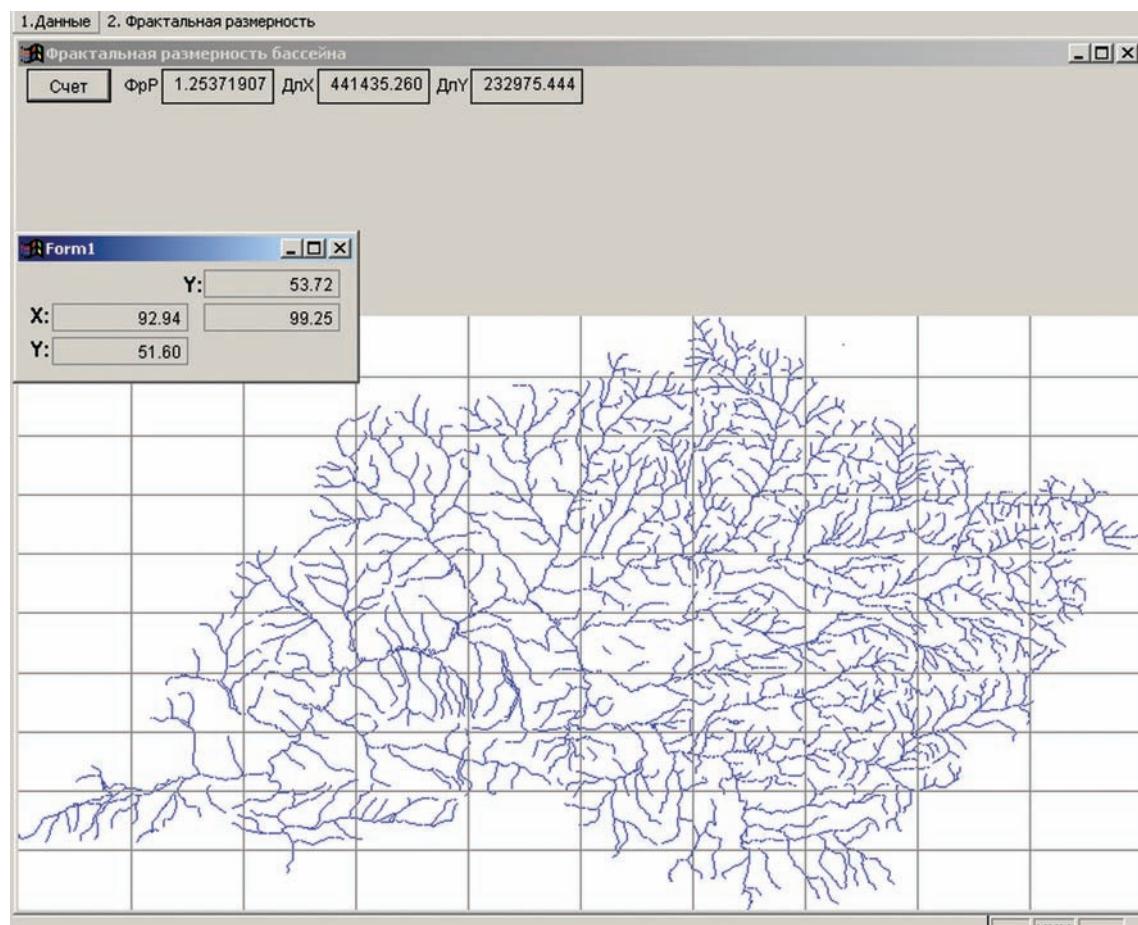


Рис. 7. Изображение экрана программы FracRivers для бассейна Бий-Хем (Большой Енисей)

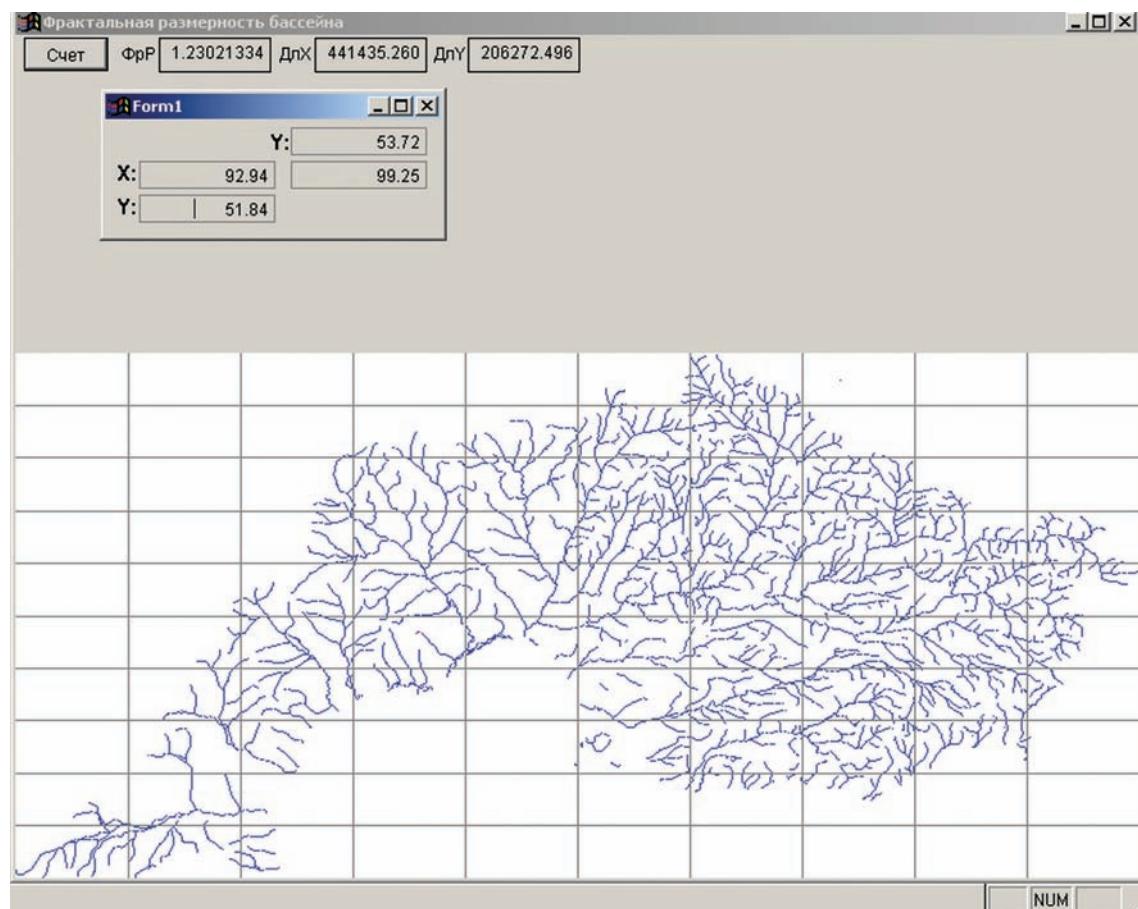


Рис. 8. Изображение экрана программы FracRivers для бассейна Бий-Хем (Большой Енисей) правые притоки

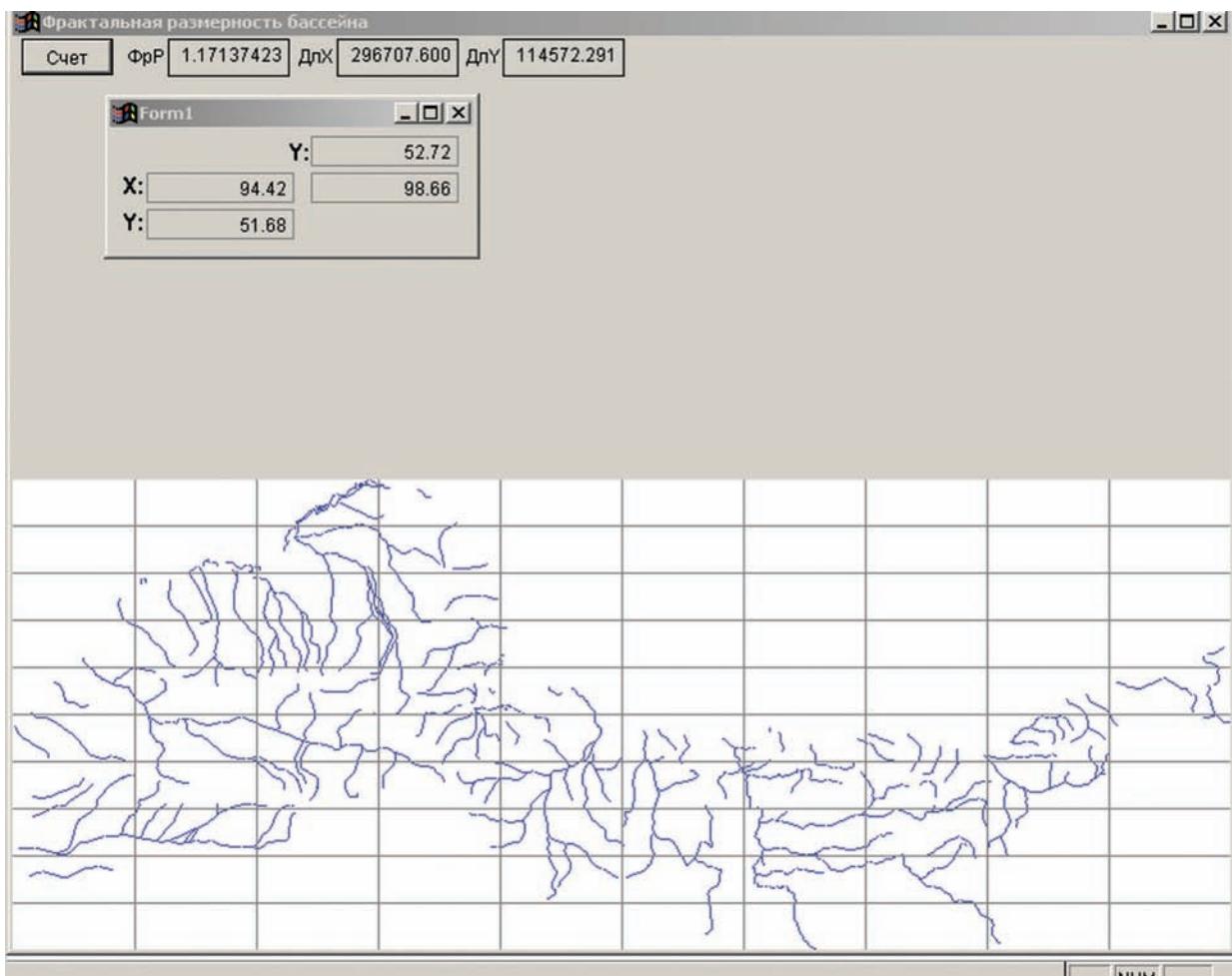


Рис. 9. Изображение экрана программы FracRivers для бассейна Бий-Хем (Большой Енисей) левые притоки

Введём коэффициент асимметрии фрактального показателя $\Delta = \frac{|D_a - D_n|}{D_a + D_n}$. Значение Δ для бас-

сейнов Кая-Хем и Бий-Хем одинаков и равен $\Delta = 0,025$. Для бассейна Хемчика $\Delta = 0$. Таким образом, для бассейнов Бий-Хем и Кая-Хем имеет место небольшая асимметрия 2,5%, фрактальные свойства лево и правосторонних притоков Хемчика симметричны.

Сравнение результатов вычисления фрактального показателя по соотношению длина-площадь и ёмкостного метода отнесём к параграфу 5.

4. Определение фрактальной размерности речной сети с использованием теории порядка рек

Структура речного бассейна определяется закономерностями строения речных долин. Анализ строения речных систем, проведённый в работах зарубежных и отечественных исследователей [13–15] показал, что одним из наиболее важных показателей структуры речного бассейна является поря-

док входящих в него рек. Согласно классификации Хортона [14] речной системе присваивается определенный порядок i , причем неразветвленным элементарным потокам присваивается первый порядок, а затем при слиянии однопорядковых водотоков порядок увеличивается на единицу. Главная река по данной классификации имеет наибольший порядок и обозначается через s . Речная сеть по Хортону характеризуется – показателем длины r_s , т.е. отношением длин рек соседних порядков, средней длиной водотока L_i порядка i и показателем ветвления r_b , т.е. отношением количества водотоков смежных порядков.

Основные водные артерии Тувы реки Бий-Хем, Кая-Хем, по данным приведённым в монографии Л.М. Корытного [1] отнесены согласно классификации Хортона-Штралера к седьмому порядку.

Показатель ветвления r_b вычисляется, как отношение числа рек N_i порядка i к числу рек N_{i+1} следующего, более высокого порядка:

$$r_b = \frac{N_i}{N_{i+1}}, \quad (6)$$

откуда:

$$N_i = r_b N_{i+1} = r_b^{s-i} N_s. \quad (7)$$

Заметим, что $N_s = 1$. Показатель ветвления r_b слабо зависит от порядка русла и остается в среднем постоянным [8].

Для основных речных бассейнов Тувы значение показателя ветвления r_b приведены в табл. 1, [1].

Как уже говорилось, показатель длины $r_l = L_i/L_{i-1}$ определяется, как отношение суммарной длины рек L_i одного порядка к суммарной длине рек L_{i-1} на порядок меньше. Вычисление этого показателя связано с определенными трудностями, нарастающими при изменении масштаба карты в сторону увеличения.

Таблица 1

Река	Порядки						
	I-II	II-III	III-IV	IV-V	V-VI	VI-VII	Средний
Бий-Хем	3.8	4.6	3.9	4.3	7.5	2	3,7
Каа-Хем	4.2	4.4	4.2	3.8	5	3	4,1

Для исследуемой нами территории значение r_l рассчитывались двумя способами: в первом случае использовались справочные данные [16, 17]. Для бассейна Бий-Хема значения r_l , в среднем равны 2,30, а для бассейна Каа-Хема – 2,33.

Во втором случае значения r_l определялись с использованием ГИС по электронной карте масштаба 1:1000000. Применение ГИС-технологий (используются слои, отвечающие притокам разных порядков) позволяют более быстро производить классификацию рек по их порядкам и определять длину соответствующих водотоков. Использовалась выборка из десяти рек, не имеющих притоков (для данного масштаба карты) к длинам рек имеющих один приток для того же масштаба.

Для Бий-Хема выборка производилась в районе между 96°–97° в.д. и 52°–53° с.ш. – $r_l = 2,70$; (см. рис. 1, прямоугольные полигоны).

Каа-Хема 96°–99° в.д. и 50°–51° с. ш. – $r_l = 2,54$.

На основе теории порядка рек Хортона Хэком (изложение материала можно найти в [3]) было ус-

тановлено соотношение вида (1), где показатель фрактальной размерности D связывался с характеристиками r_l и r_b речной сети:

$$D = D_s \equiv \frac{2 \ln r_l}{\ln r_b}. \quad (8)$$

Проведенные по формуле (8) расчеты показывают, что для бассейнов рек:

Бий-Хема – $D_s = 1,27$ при $r_l = 2,30, r_b = 3,71$;

Каа-Хема: – $D_s = 1,19$ при $r_l = 2,33, r_b = 4,10$.

Представляет практический интерес обратная задача: – оценка показателя длины r_l , при условии, что величина фрактального показателя D известна (например: D определена из соотношения длина – площадь и полагается $D = D_s$) и показатель ветвления r_b слабо зависит от порядка русла, оставаясь в среднем постоянным [1].

Значение r_b для рек разных порядков берутся из табл. 1 и рассчитываем искомое значение параметра длины r_l (табл. 2).

Таблица 2

Река	r_l							Получено из [16, 17]
	I-II	II-III	III-IV	IV-V	V-VI	VI-VII	Среднее	
Бий-Хем	2,32	2,8	2,38	2,62	4,57	1,22	2,65	2,30
Каа-Хем	2,39	2,50	2,39	2,16	2,85	1,71	2,33	2,33

График зависимости показателя длины r_l от порядка реки показан на рис. 10.

Таким образом, используя фрактальный показатель D , произведен расчет показателя длины r_l ,

значение которого незначительно (не более 15%) отличается от полученных на основе опубликованных данных [16, 17].

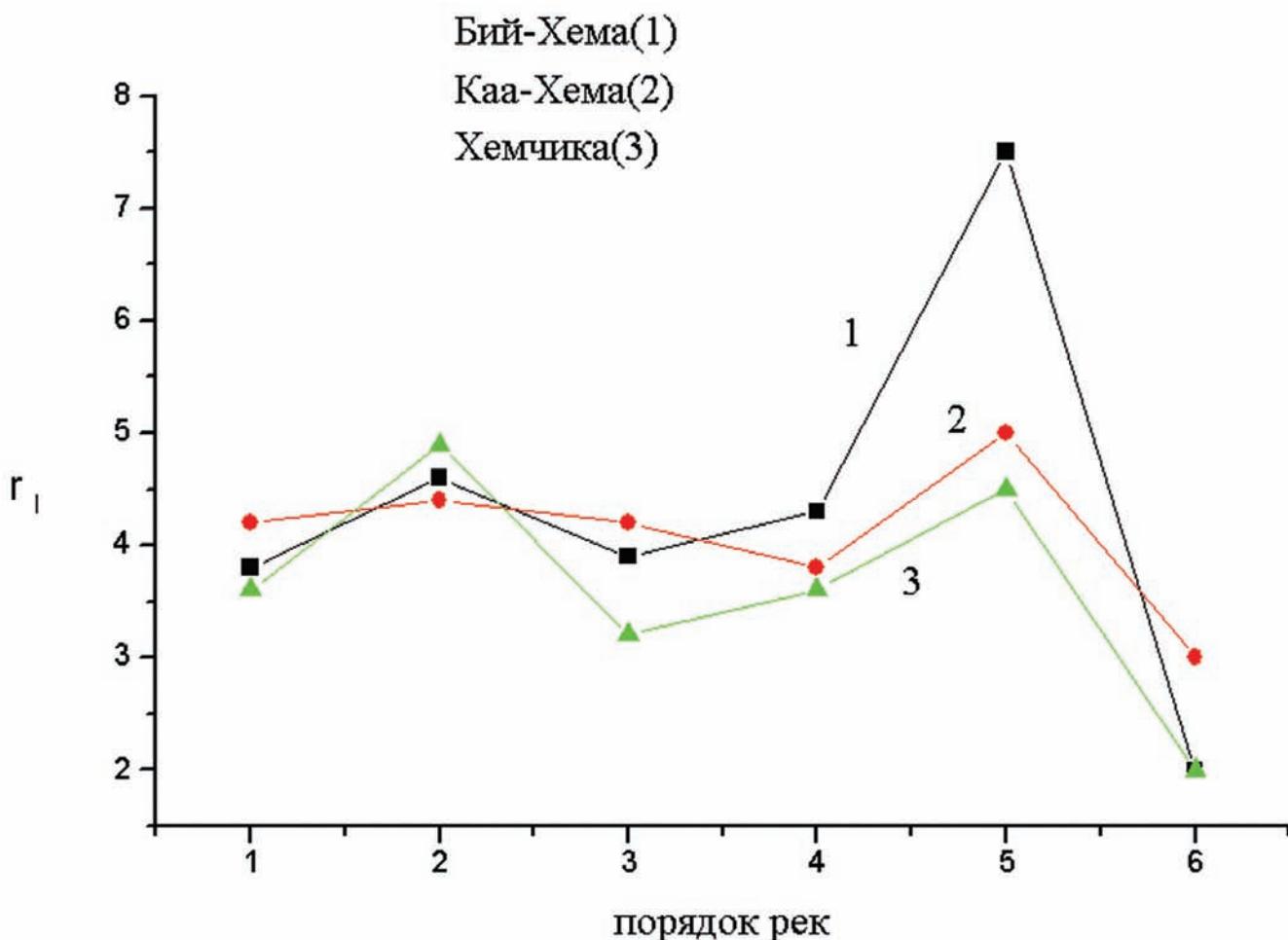


Рис. 10. График зависимости показателя длины r_l от порядка реки

Подчеркнём, что, совместное использование методов фрактальной геометрии и технологий ГИС позволяет получать оценку для показателя длины r_l , минуя трудоёмкие расчёты определения суммарных длин притоков разных порядков на основе топографических карт.

Перейдем к сравнению значений фрактальных показателей речной сети Тувы, полученных разными методами в параграфах 2-4.

5. Сравнительный анализ фрактальных показателей и заключение

В табл. 3 приведены полученные значения показателя фрактальной размерности речных систем Республики Тыва с использованием различных алгоритмов расчёта: длина-площадь, модифицированный ёмкостный метод и метод на основе теории порядка рек.

Как видно из табл. 3, вычисленные по всем методикам значения показателя D для бассейнов рек Бий-Хем, Кая-Хем и Хемчик лежит в интервале $1 < D \leq 1,27$. Результаты расчётов оказываются одного порядка и отличие составляет не более 10%. Близость значений, D полученная разными мето-

дами важна в практическом отношении, поскольку позволяет ставить и решать обратные задачи. Например, при оценке ряда параметров речных сетей можно использовать те значения показателя D , которые определяются наиболее просто. В частности, как было показано, оценка показателя длины r_l в теории порядка рек может быть легко произведена с использованием фрактального показателя D , полученного по методике длина-площадь. Важную роль при расчетах играет разработанная геоинформационная система речной сети Тувы, позволяющая автоматизировать и существенно упростить многие трудоёмкие процессы вычисления характеристик речных сетей в сравнении с классическими методами.

Найденные значения показателей D для рассмотренных речных бассейнов Тувы по величине согласуются с результатами исследований других речных систем. В частности, для уже упоминавшихся речных бассейнов северо-востока США $D = 1,2$.

Выполненное исследование ориентировано на разработку современных подходов к разностороннему изучению пространственной организации речной сети и её динамики на основе использова-

Таблица 3

Наименование речной системы	D (на основе соотношения «длина-площадь бассейна»)	D_s (на основе теории порядка рек)	D_s (модифицированный метод квадратов)	Относительная погрешность $\delta = \frac{ D - D_s }{D}$
Бий-Хем	1,22	1,27	1,25	$\leq 0,041$
Каа-Хем	1,14	1,19	1,24	$\leq 0,087$
Хемчик	1,12	*	1,23	$\leq 0,098$

*) для реки Хемчик фрактальный показатель не рассчитывался из-за отсутствия справочных данных показателей r_l и r_b .

ния современных информационных и вычислительных технологий. Особенно это относится к геоинформационным технологиям наиболее перспективного инструментария для пространственно-временного моделирования гидрологических процессов и явлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корытный Л.М., Безруков Л.А. Водные ресурсы Ангаро–Енисейского региона. Новосибирск: «Наука» Сибирское отделение. 1990. 205 с.
2. Зятькова Л.К. Структурная геоморфология Алтая-Саянской горной области. // Новосибирск : «Наука» Сибирское отделение. 1977. 215 с.
3. Федер Е. Фракталы. М: Мир. 1991. 254 с.
4. Mandelbrot B.B. Self-affine fractal sets. -In: Fractals in Physics (eds. L. Pietronero & E. Tosatti. Amsterdam: North-Holland. 1986. p. 3-28). [Имеется перевод: Фракталы в физике/ Под ред. Л. Пьетронеро, Э. Тозатти. – М.: Мир. 1988. с. 9.]
5. Гурцев А.И., Цельниker Ю.Л. Фрактальная структура ветви дерева. // Сибирский экологический журнал. 1999. т. VI. № 4. С. 431-441.
6. Пузаченко Ю.Г. Приложения теории фракталов к изучению структуры ландшафта. // Изв. АН СССР. Сер.геогр. 1997. № 2. С. 24-40.
7. Лухнева О.Ф., Зуев Ф.Л. Фрактальная геометрия сетки активных разломов и рельефа Прибайкалья: применение метода встречного масштабирования дисперсий Геофизика на пороге третьего тысячелетия: Тр. 1-й Байк. молод. шк.-семин., Иркутск – Черноруд, Иркутск: Из-во ИрГТУ. 1999. С. 103–109.
8. Ринчинов З.Ц. Фрактальный анализ речной сети и разломной тектоники Прибайкалья. 18-я Всерос. молод. конф. «Геология и геодинам. Евразии». Иркутск. 19-23 апр., 1999; Матер. науч. конф. Иркутск: 1999. С.57-58.
9. Логинов В.М., Чупикова С.А. Анализ фрактальных размерностей водных систем Тувы с использованием методов математического моделирования и ГИС технологий //Труды межд. конференции «Фундаментальные проблемы воды и водных ресурсов на рубеже третьего тысячелетия». Томск. 2000. С. 428-430.
10. Берлянт А.М., Мусин О.Р., Собчук Т.В. Картографическая генерализация и теория фракталов М: 1998. 136 с.
11. Котельников В.И., Чупикова С.А. Применение геоинформационных технологий в планировании развития гидроэнергетики региона на примере республики Тыва. //Геоинформатика. 2004. № 1. С. 54-57.
12. Корытный Л.М. Симметрия в географии. //География и природные ресурсы. – 1984. № 1. С. 171-176.
13. Философов В.П. О значении порядков долин и водораздельных линий при геолого-геоморфологических исследованиях. В кн. Вопросы морфометрии Вып. 2 Саратов: Из-во Саратовского ун-тета. 1967. С. 4-66.
14. Хортон Р.Е. Эрозионное развитие рек и водохранилищных бассейнов. М: ИЛ. 1948. 159 с.
15. Гарцман И.Н. Топология речных систем и гидрографические индикационные исследования. // Водные ресурсы, 1973. № 3. С. 109-124.
16. Гидрологическая изученность. Л.: Гидрометеоиздат. 1967. Т.16. Вып. 1. 822 с.
17. Ресурсы поверхностных вод СССР. Л.: Гидрометеоиздат. 1973. Т. 16. Вып. 1. 722 с.