

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД УЧЕТА КОСВЕННОЙ ИНФОРМАЦИИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ КАРТ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В.А. Леус

Институт геологии нефти и газа СО РАН, 630090, просп. Коптюга, 3, Россия

Предложен новый метод учета косвенной информации при построении геологических карт, использующий степенные потенциал-полиномы в качестве основного формообразующего средства. Главную особенность предлагаемого подхода составляет отказ от механических аналогий и постановка задачи в рамках информационно-геометрической схемы. Восполнение разбросанных данных проводится без участия аппроксимационных операций, причем используемые базисные функции обладают свойством, минимизирующим сложность образуемого рельефа. Благодаря этому предлагаемый способ не требует явного применения трудоемких вариационных процедур решения некорректных задач. Опыт использования программной реализации данного способа при построении структурных карт погруженных геологических поверхностей показал его эффективность и хорошее качество результатов.

Компьютерная картография, разбросанные данные, карта в изолиниях, сложность геологического рельефа, учет косвенной информации.

INTERPOLATION APPROACH FOR USING INDIRECT INFORMATION BY GEOLOGICAL MACHINE CONTOURING

V.A. Leus

It is suggested to use indirect information in machine contouring by means of power potential polynomials as a basic geometrical tool. Unlike other methods, the problem in the new approach is formulated in terms of an information-geometric model free from the mechanical analogies. Interpolation of scattered data does not require approximation procedures, and the basis functions intrinsically minimize the complexity of the contoured surfaces. This allows avoiding labor-consuming explicit variational solutions to ill-posed problems. The new algorithm was successfully used in structural mapping of buried surfaces.

Machine contouring, scattered data, contour map, complexity of surface, indirect information

ВВЕДЕНИЕ

В осадочных толщах рельефы поверхностей раздела на различных глубинах имеют иногда сходную конфигурацию, поэтому детальное знание геометрии некоторого горизонта может быть адекватно использовано для дополнения скудных сведений о другом горизонте. Примером в этом смысле является учет геометрии, полученной сейсморазведкой, некоторого горизонта (косвенная информация), при построении карты в изолиниях другого горизонта, вскрытого бурением (прямая информация) лишь в сравнительно небольшом числе пунктов. Разумеется, простая функциональная зависимость между рельефами разных уровней существует далеко не повсеместно, однако в юрских отложениях Западной Сибири практика последних десятилетий показала применимость так называемой линейной модели [1, 2]. Сущность ее в том, что рельефы разных уровней удовлетворительно связываются следующей линейной корреляционной зависимостью:

$$z' = wz + d_0 + d_{-1}x + d_{-2}y = wz + b(x, y),$$

где z и z' — глубинные отметки на соответствующих горизонтах, x и y — топографические координаты, w , d_0 , d_{-1} , d_{-2} — числовые коэффициенты линейной модели. Первый член в этом выражении с так называемым коэффициентом *выполаживания* w учитывает амплитудную зависимость рельефообразующих элементов, а остальное — это плоскостной тренд. „По сравнению с картируемой границей поверхность, по которой уже построена карта, может быть расположена выше, ниже или на том же уровне. При этом предполагается, что между картируемой и уже закартированной поверхностями существует линейная зависимость...“ [3, с. 99]. Именно для таких ситуаций предназначен предлагаемый ниже интерполяционный метод учета косвенной информации.

В работах [2, 3] описана компьютерная методика учета косвенной информации при построении карт в изолиниях, базирующаяся на применении бикубических сплайнов для описания рельефов, исходя из линейной по z модели. В свое время программное обеспечение, реализовавшее эту методику, позволило совершить качественный скачок в этой области компьютерной картографии. Однако за годы эксплуатации в этом подходе выявились некоторые негативные стороны, которые заставили продолжить поиски более

совершенных технологических приемов. На наш взгляд, принципиальным недостатком подхода является обязательное решение некорректной вариационной задачи с тем или иным стабилизирующим фактором. Задачу сглаживания геологических данных целесообразно вообще вычленить в отдельный технологический этап по двум причинам. Во-первых, всякая универсализация, при всей ее заманчивости, ведет к неповоротливости. Во-вторых, качество сглаживания как статистического процесса находится в прямой зависимости от избыточности исходной информации, что при получении ее, например бурением, обходится слишком дорого и обеспечивается редко, тогда как учет косвенной информации проводится и на слабо изученных площадях. Настоящая статья посвящена новому варианту математического воплощения хорошо зарекомендовавшей себя идеи учета косвенной информации при построении карт в изолиниях.

Главную особенность предлагаемого подхода составляет отказ от используемых в [2, 3] механических аналогий и постановка задачи в рамках информационно-геометрической схемы, полностью избавляющей от необходимости поиска экстремума нелинейного функционала. Из соображений вычислительной эффективности в данном подходе предпочтение отдается потенциал-полиномам как более гибкому в сравнении с бикубическими сплайнами аппарату приближенного представления геологических данных. Благодаря этому оказалось возможным получать решения строго интерполяционно, не применяя каких-либо сглаживающих процедур.

К явным недостаткам предлагаемого подхода можно отнести только характерное для радиальных базисов вообще свойство заполненности матриц соответствующих систем линейных алгебраических уравнений, что при больших размерах матриц может потребовать слишком долгого счета. Однако применение потенциал-полиномов в практике геологического картографирования показало преувеличенность этих опасений. При размере матрицы $\sim 10^3$ время получения решения системы уравнений на современных ПЭВМ составляет секунды, а на площадях, где количество точек с прямой информацией о моделируемой поверхности $\sim 10^4$ и более, всегда возможна (и необходима) разумная локализация в пределах $\sim 10^3$ точек на окрестность. Ведь отдаленные (от рассматриваемого локального участка) точки, „экранированные“ близкими, все равно не вносят вклада в местное формообразование.

В продолжение более чем десятилетнего периода эксплуатации математического обеспечения для целей компьютерного картографирования потенциал-полиномы успешно используются как инструмент непрерывного моделирования геологических поверхностей по разбросанным (scattered) дискретным данным [4]. Для этого выбирается базисный репер из конечного числа специально подобранных функций v_k , и математическая модель геологической поверхности строится как линейная комбинация

$$s(x, y) = \sum_{k=1}^K d_k v_k(x, y). \quad (1)$$

В качестве базисных функций используются степенные потенциалы

$$v_k(x, y) = [a_k^2 + (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2]^{1/2}, \quad a_k \neq 0. \quad (2)$$

Числовые коэффициенты (заряды) d_k отыскиваются из условий, налагаемых на функцию $s(x, y)$ в конечном числе пробных точек (x_j, y_j) , $j \in \overline{1J}$. Как правило, в пробных точках известны значения f_j выполняемой функции, но допускается задание и дифференциальных соотношений, поэтому обобщенно такое восполнение называется дифференциально обусловленным генерированием. В целом условия, заданные в пробных точках, приводят к системе линейных алгебраических уравнений

$$s(x_j, y_j) = \sum_{k=1}^K d_k v_k(x_j, y_j) = f_j, \quad j \in \overline{1J} \quad (3)$$

с неизвестными d_k , представляющей собой математическую формулировку задачи конечно обусловленного генерирования функции нескольких переменных. График подобной функции $s(x, y)$ рассматривается в качестве математической модели геологической поверхности.

Очевидно, что далеко не всякие системы функций могут выступать в качестве базисных в задачах дифференциально обусловленного генерирования. Линейной независимости, например, в многомерном случае недостаточно для этой цели. Оказалось, что базисные функции должны быть линейно независимыми не только в рассматриваемой области, но и в любой ее подобласти, что привело к понятию сильной линейной независимости. Свойство сильной линейной независимости обеспечивает почти достоверную разрешимость задачи конечно-обусловленного генерирования, т. е. разрешимость с вероятностью теоретически сколь угодно близкой к единице. Понятие почти достоверной разрешимости конструктивно обосновано в [5].

Совокупность P_V линейных комбинаций степенных потенциалов (степенной потенциод) рассматривалась в работе [6], где при ограничении $a_k^2 > 0$ доказана сильная линейная независимость для базисных реперов, составленных, в частности, из потенциалов вида (2). Однако для целей учета косвенной информации, как будет показано ниже, нужны нулевые значения параметров a_k , что требует дополнительного исследования линейной независимости. Дополненный за счет предельного перехода к значению $a_k = 0$, а также добавлением к базису функции $1(x, y)$, всюду равной единице, расширенный степенной потенциод \tilde{P}_V достаточно хорошо отвечает требованиям задачи. К тому же особые свойства некоторых его базисных элементов избавляют от необходимости применять в процессе численного решения весьма трудоемкие вариационные процедуры с нелинейными функционалами.

КОНУСНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ НА ЧИСЛОВОЙ ПРЯМОЙ

Исследуем систему конусных потенциалов вида

$$v(r) = (r^2)^{1/2}, \quad (4)$$

где $r = |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2}$ — радиальная переменная, x — произвольная точка в m -мерном простран-

стве R^m , а ее координаты — $x_i, i \in \overline{1, m}$ (аналогично для точки $y \in R^m$). Опорная точка y выполняет роль геометрического параметра. Важнейшим свойством базисных функций является сильная линейная независимость, состоящая в том, что линейно независимы сужения этих функций на всяком плотном в некотором шаре множестве. Прежде всего разберем одномерный случай $m = 1$.

Пусть на числовой оси R^1 произвольно выбраны K опорных точек с координатами $t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots < t_K$.

Теорема 1. *Потенциалы $v(|t - t_k|) = |t - t_k|$ линейно независимы на R^1 при любом K , но не являются линейно независимыми в сильном смысле при $K > 2$.*

Схема доказательства приводится в приложении I.

СИЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Теперь перейдем к пространству размерности $m > 1$, где произвольную точку обозначаем буквой x (или y). Примечательно, что указанный выше недостаток — отсутствие сильной линейной независимости — ограничивается только одномерным случаем, а именно справедлива

теорема 2. *Конусные потенциалы на R^m линейно независимы в сильном смысле (при любом K).*

Доказательство в сокращенной форме приводится в приложении II.

Из этой теоремы вытекает свойство сильной линейной независимости системы степенных потенциалов вида (2) для $a_k^2 \geq 0$. Действительно, сужение всякой линейной комбинации таких потенциалов на произвольную прямую L обязательно представляет собой выражение типа (7). Буквально повторяя концовку доказательства, мы и придем к заключению о сильной линейной независимости расширенного предельным переходом (при $a_k \rightarrow 0$) степенного потенциода \tilde{P}_V .

УЧЕТ КОСВЕННОЙ ИНФОРМАЦИИ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЙ ПОВЕРХНОСТИ МИНИМАЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ

Здесь мы рассматриваем важный для картографирования двумерный случай ($m = 2$), поэтому координаты точки на плоскости обозначаем (x, y) . Дискретные данные — это конечная совокупность значений некоторого непрерывного поля, привязанных к определенным пробным точкам (x_j, y_j) на плоскости. По дискретным исходным данным, ориентированным на определенный вид интерполянта, вычисляется континуальная модель, являющаяся приближенным математическим образом картируемого поля. Континуальная модель представляет собой определенным образом организованный набор числовых коэффициентов, позволяющий вычислять значение интерполянта в произвольной точке (x, y) .

Понятие „сложность геологической поверхности“ довольно расплывчато и для того чтобы получить величину, численно характеризующую это качество, необходимо адекватно ограничить совокупность оцениваемых по сложности объектов. Одно ограничение диктуется формой математического представления: рассматриваются графики непрерывно дифференцируемых функций двух вещественных переменных x и y . Второе ограничение вытекает из условий математического моделирования: оцениваемые

объекты должны удовлетворять одним и тем же условиям на общем множестве пробных точек. Третье ограничение касается области определения объектов: все оцениваемые функции определены на общей области, являющейся выпуклой оболочкой множества пробных точек. Поскольку пробных точек конечное количество, то этой областью является наименьший выпуклый многоугольник, содержащий все пробные точки. Как видно из (1), совокупность оцениваемых по сложности объектов представляет собой K -мерное континуальное множество в соответствии с произвольным выбором параметров a_k в базисных потенциалах типа (2).

Для определенного таким путем предметного множества можно ставить вопрос о численной мере, характеризующей сложность его объектов. В качестве таковой целесообразно рассматривать площадь поверхности графика функции. Обосновывая этот выбор, сошлемся на известное свойство эластичных пленок, натянутых на жесткий каркас, принимать форму с минимальной площадью поверхности. Следует отметить, что площадь поверхности впервые при учете косвенной информации была использована А.М. Волковым с соавторами как один из функционалов в вариационной задаче. (Строго говоря, использовалась интегральная конструкция, численное значение которой близко к площади поверхности при малых первых производных). Введение этой меры сложности опирается на то обстоятельство, что добавление новой детали в геологический рельеф сопряжено с локальным деформированием поверхности, влекущим, вообще говоря, увеличение ее общей площади. Для рассматриваемой задачи учета косвенной информации особый интерес представляет экстремальный случай — достижение минимума сложности.

Величина a_k в выражении степенного потенциала (2) выполняет роль параметра, регулирующего „натяжение“ графика. Натяжение увеличивается с уменьшением значения a_k и стремится к максимуму при стремлении a_k к нулю. При фиксированных пробных значениях площадь поверхности уменьшается с увеличением натяжения. Для случая $K = 1$ это очевидно, так как асимптотический конус ($a = 0$) обязательно объемлется гиперболоидом при любом $a \neq 0$, если их вершины совмещены. Естественно ожидать, что график конечно обусловленной функции $s(x, y)$, во всех слагаемых которой $a_k = 0$, имеет минимальную площадь. Чтобы получить подтверждение этому, обратимся к результатам численного эксперимента.

На рис. 1 показан в изолиниях рельеф графика функции $s(x, y)$, которая принимает попеременно значения 10 и 90 в двенадцати точках плоскости (x, y) . Заданные значения распределены так, что точка с минимальным значением (залитый кружок) имеет своими соседями точки, в которых заданы максимальные значения (ромб) и наоборот. Такое „шахматное“ чередование позволяет наиболее отчетливо

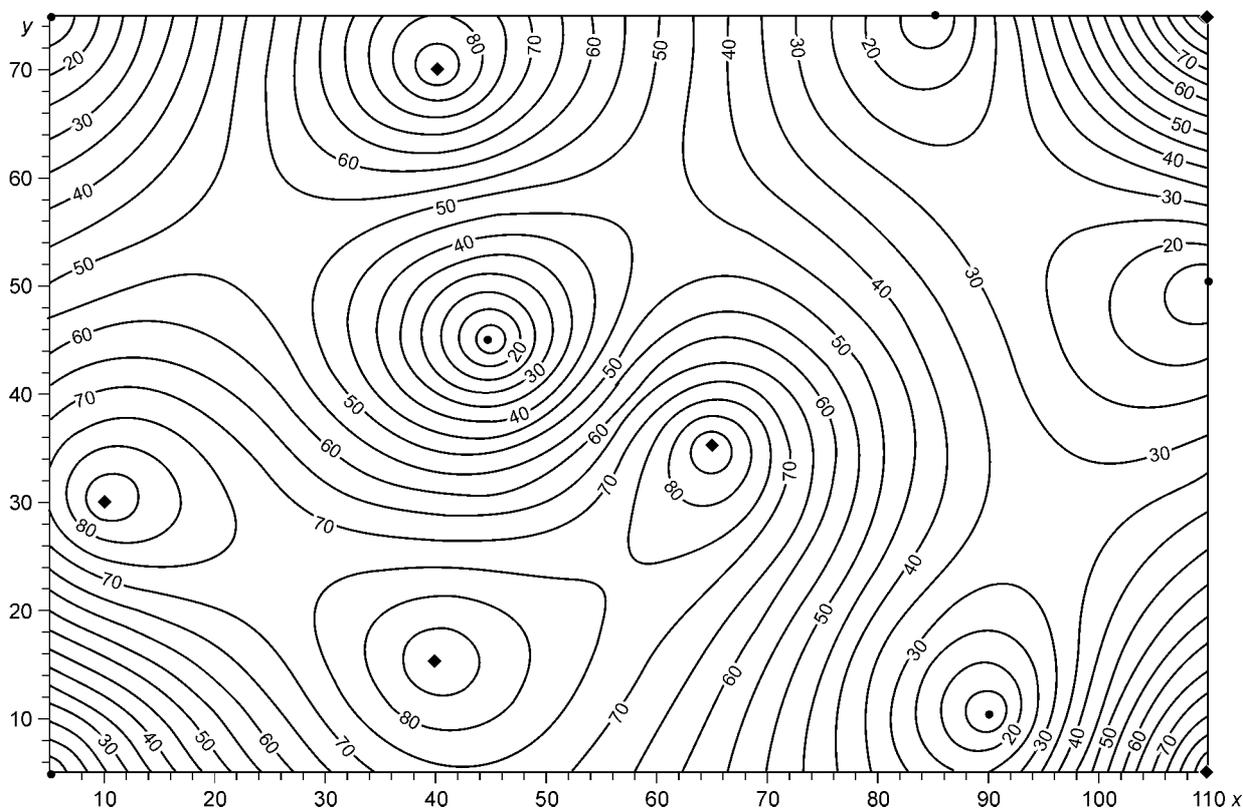


Рис. 1. Модельный пример рельефа минимальной площади.

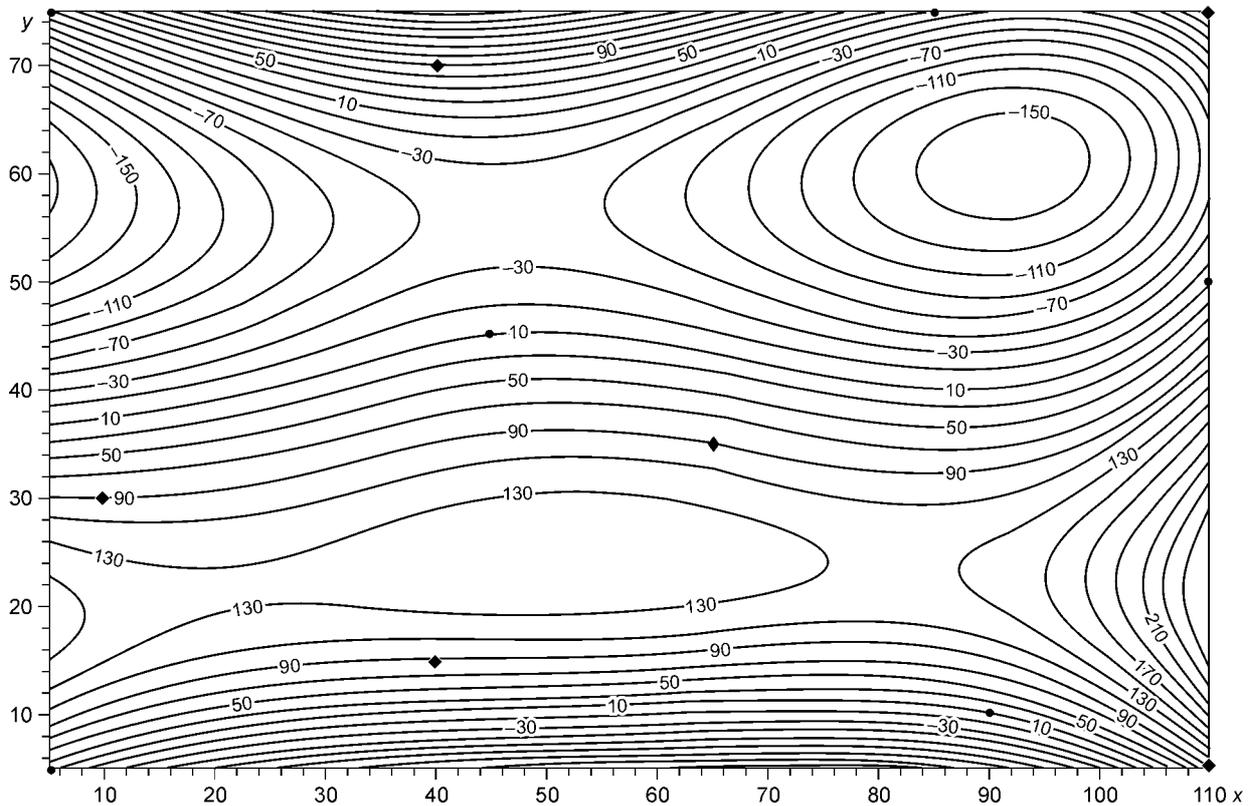


Рис. 2. Пример рельефа максимальной площади при тех же опорных точках.

выявить интересующую нас зависимость сложности от величины a_k . Для рис. 1 функция $s(x, y)$ вычислялась в результате решения системы типа (3) с величинами $a_k = 0$, а на рис. 2 приведен аналогичный рельеф для функции $s(x, y)$, вычисленной с величинами $a_k = \sqrt{50\,000}$. Рисунки 3 и 4 представляют два участка зависимости от значения a_k^2 площади поверхности соответствующих рельефов. Налицо монотонное возрастание площади с увеличением параметра a_k^2 (уменьшением натяжения) и глубокий минимум при $a_k^2 = 0$.

Коснемся еще вопроса о так называемых полиномиальных расширениях степенного потенциоида в связи с необходимостью экстраполяции исходных данных за пределы выпуклой оболочки множества пробных точек. Если не принимать мер по улучшению асимптотики интерполянта, то быстрый рост (по абсолютной величине) интерполирующей функции вне пределов выпуклой оболочки ведет к неоправданному увеличению площади ее графика, и при этом сильно искажается результирующая карта на периферии картируемой области.

Вообще говоря, к базису степенного потенциоида можно без ущерба для конечно обусловленного генерирования добавлять не являющиеся степенными потенциалами функции лишь бы эти „инородные“ функции сохраняли свойство сильной линейной независимости у расширенного базиса. Естественными кандидатами для подобной процедуры служат произведения степеней независимых переменных. Общепринятым является добавление мономов невысоких степеней, которое приводит к свойству сохранения соответствующего полинома при интерполировании значений, снятых с его графика. Благодаря этому получаются „интерполяции, точные на полиномах“ (см., например, [7]).

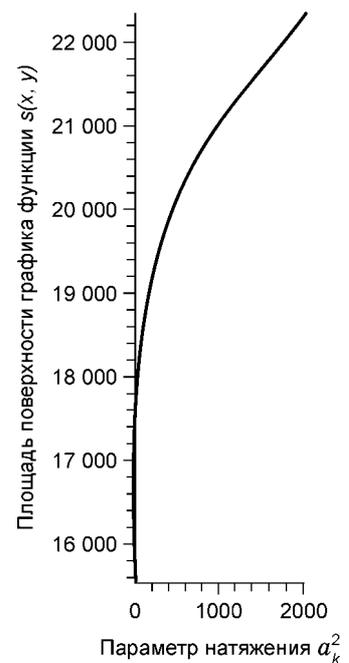


Рис. 3. Зависимость площади рельефа графика функции $s(x, y)$ от параметра натяжения a_k^2 .

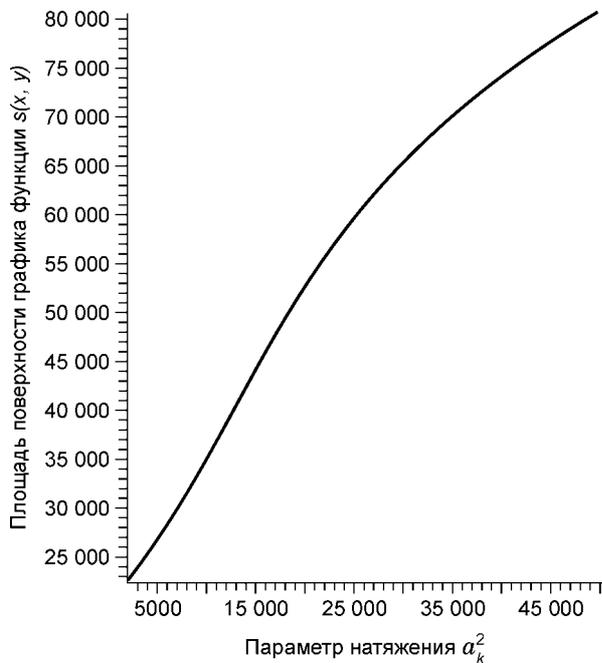


Рис. 4. Зависимость площади рельефа при больших значениях параметра натяжения.

Для учета косвенной информации при картографировании у нас используется вариант добавления к базисным потенциалам монома нулевой степени, т. е. функции $1(x, y)$, всюду равной единице. В результате этого получается расширенный потенциод P_V . Система интерполяционных уравнений приобретает следующий вид:

$$\tilde{s}(x_j, y_j) = d_0 \cdot 1(x, y) + \sum_{k=1}^K d_k v_k(x_j, y_j) = f_j, \quad j \in \overline{1, J},$$

$$\sum_{k=1}^K d_k = 0.$$

Дополнительное уравнение в этой системе для наглядности интерпретируем на языке электростатики следующим образом. „Потенциальная“ часть решения здесь представляет собой зарядово-нейт-

ральную комбинацию. Поле такой комбинации зарядов, т. е. сумма по индексу k в выражении для $\tilde{s}(x, y)$, при удалении от опорных точек (носителей зарядов) может возрастать лишь очень слабо только за счет отличного от нуля дипольного, квадрупольного или мультипольных моментов более высоких степеней. „Нулевое“ же слагаемое является константой, так что в целом интерполянт обладает хорошей асимптотикой, т. е. отсутствием быстрого роста (по абсолютной величине) при неограниченном удалении от опорных точек. Площадь графика функции в рассмотренном выше примере оказывается немного (примерно на полпроцента) меньше, когда используется базис, расширенный функцией—единицей $1(x, y)$. Однако этот положительный эффект становится существенным при наличии участков, выходящих за пределы выпуклой оболочки множества пробных точек, что характерно для реальных задач.

Для того чтобы представить предлагаемый метод учета косвенной информации в сжатом формульном виде, введем следующие обозначения. Прямую исходную информацию (например, абсолютные отметки интересующего горизонта, вскрытого в некотором числе скважин) обозначим буквой Π , косвенную исходную информацию (например, отметки изученного сейсморазведкой отражающего горизонта в пунктах, расположенных вдоль профилей) обозначим буквой K , дискретную информацию о коэффициенте выполаживания на исследуемой территории обозначим буквой W (в следующем разделе о нем будет сказано подробнее). В применении к данным, обозначенным буквой X , операцию порождения континуальной модели на основе конусных потенциалов будем обозначать $\langle X \rangle$, операцию порождения континуальной модели на основе степенных потенциалов „немаксимального натяжения“ ($a_k^2 > 0$) будем обозначать (X) . Если результирующую функцию обозначить $R(x, y)$, то предлагаемый процесс учета косвенной информации, ориентированный на чистую интерполяцию без использования вариационных процедур, можно выразить следующей компактной формулой:

$$R(x, y) = \langle \Pi \rangle + \langle W \rangle \times ((K) - \langle \Pi \rangle + \langle \Pi \ominus (K) \rangle). \quad (5)$$

Символы „ \times “, „плюс“ и „минус“ означают соответствующие арифметические операции над значениями интерполянта в любой точке (x, y) . Символ операции, взятый в кружок (например, \ominus) означает частичную операцию, производимую над разнородными объектами (континуальной моделью и дискретными данными) только в пробных точках последних. Результатом являются новые дискретные данные с теми же пробными точками, представляющие собой разности значений континуальной модели и дискретных данных.

Вложенность знаков операций над данными в этой формуле определяет хронологическую последовательность применения: „внутренняя“ операция выполняется раньше „внешней“. Поскольку во всех процессах восполнения данных не используются аппроксимационные процедуры, из формулы (5) непосредственно видно совпадение результирующей поверхности с дискретными значениями прямой информации. Действительно, в соответствующих пунктах выражение в обычных круглых скобках равно нулю, тогда как подход, развиваемый в [2, 3], не обеспечивает этого свойства автоматически. Вместе с тем процесс, описываемый формулой (5), автоматически учитывает как изменение по простираанию амплитуд осцилляций рельефа, так и плоскостной тренд в соответствии с линейной моделью.

При интерполяции достаточно густых исходных данных целесообразно применять потенциал-полиномы „слабого“ натяжения, так как они обеспечивают хорошую плавность результирующей поверхности. Использование же потенциал-полиномов максимального натяжения, согласно формуле (5), для континуального восполнения скудных данных о прямой информации уменьшает вероятность возникновения каких бы то ни было „артефактов“. Этот способ является своего рода аналогом одномерной кусочно-линейной интерполяции в многомерном случае и, как таковой, гарантирует от появления ложных осцилляций (выпячиваний и впадин) в результирующем рельефе, приближая тем самым площадь графика $R(x, y)$ к желаемому минимуму.

Если кроме функции $l(x, y)$ к базису добавить еще мономы x и y , то приходим к линейно-расширенному потенциоиду \tilde{P}_V . Предлагаемый метод учета косвенной информации обладает свойством инвариантности по отношению к линейной модели, что утверждает

теорема 3. Если каждая интерполяция, входящая в (5), однозначно разрешима в линейно-расширенном потенциоиде, и линейные соотношения в пунктах прямой информации выполняются без погрешностей, то линейная модель реализуется точно по всем (x, y) .

Доказательство теоремы приводится в приложении III.

Согласно самому способу отыскания через решение системы линейных алгебраических уравнений, коэффициенты интерполяционного потенциал-полинома являются непрерывными функциями от значений, заданных в пробных точках. В силу этого малые отклонения данных от точной линейной зависимости в пунктах прямой информации приведут лишь к незначительным расхождениям с линейной моделью по всем (x, y) .

Вычислительный процесс, описываемый формулой (5), применяется также для решения задач иного рода. Например, когда некоторая поверхность раздела, вскрытая бурением, отождествлена с отражающим горизонтом, появляется возможность коррекции поля, построенного по данным сейсморазведки, вблизи пунктов расположения скважин с сохранением поля вдали от них. Это так называемая задача „самоувязки“ (см. [3, табл. 6, условие 5]). Точно так же может быть использована уточняющая информация и любого иного происхождения. В подобных случаях результат процесса (5) является лишь промежуточным и используется затем наряду с корректируемым полем (K) для построения „локально скорректированной карты“ [S] как весовой суммы

$$[S] = p \times [R] + (1 - p) \times [(K)],$$

где символ [X] означает представление данных X в виде сеточной функции на прямоугольной сетке.

Нелинейная весовая функция $p(x, y)$ получается мажорирующей суперпозицией базовых весовых функций вида

$$p_k(x, y) = \begin{cases} \exp \{-g_k^2 r^2 / (r_k^2 - r^2)\}, & r < r_k, \\ 0, & r \geq r_k, \end{cases} \quad r = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}.$$

При выполнении мажорирующей суперпозиции в точке (x, y) результатом принимается максимальное из значений всех базовых весов в этой точке, т. е. $p(x, y) = \max_k p_k(x, y)$. Координаты (x_k, y_k) соответствуют положению устья k -й скважины. Параметр g_k регулирует характер спада базовой функции к нулю, а параметр r_k ограничивает окрестность влияния данной скважины.

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА

Интерполяционный метод учета косвенной информации воплощен в программном обеспечении, которое прошло многолетнюю апробацию в лаборатории математического моделирования природных нефтяных и газовых систем ИГНГ СО РАН [8—12]. В таблице представлена последовательность техно-

Общетехнологический план учета косвенной информации

1	Создание континуальной модели по косвенной информации
2	Введение прямой информации в вычислительный процесс
3	Вычисление поля коэффициента выполаживания
4	Создание континуальной модели по дискретным данным о частичной разности прямой и косвенной информации
5	Построение результирующей континуальной модели согласно формуле (5)
6	Вычисление сеточной функции по континуальной модели
7	Построение локально скорректированной карты
8	Контроль полученного решения в пунктах задания прямой информации

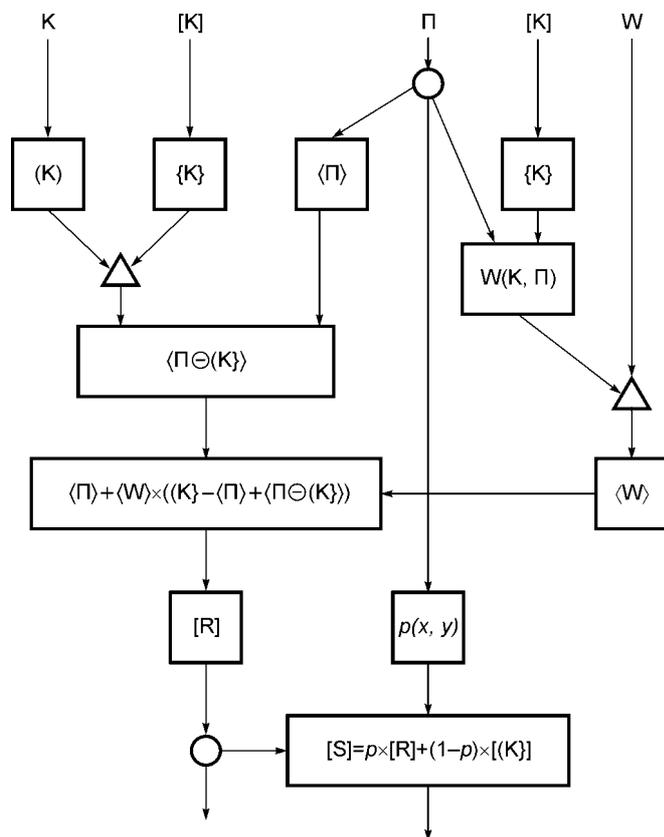


Рис. 5. Блок-схема программного обеспечения.

логических этапов процесса учета косвенной информации. На рис. 5 показана блок-схема созданного в лаборатории программного обеспечения. К введенным выше обозначениям операций (или их результатов) над данными добавлено обозначение $\{X\}$, соответствующее построению континуальной модели из сеточной функции посредством локального бикубического сплайна как интерполянта. Эта континуальная модель используется для быстрого восполнения данных по густой регулярной сетке, предварительно полученной на основе потенциал-полиномов. При достаточной густоте регулярной сетки качество континуальной модели достаточно высокое, а затраты на ее создание сравнительно невелики.

Входной поток (верхняя строка на блок-схеме) состоит из прямой информации в виде дискретных данных Π , косвенной информации либо в виде дискретных данных K , либо в виде сеточной функции $\{K\}$, а также может включать в себя территориальное распределение коэффициента выполаживания в виде дискретных данных W . Если распределение коэффициента выполаживания во входном потоке отсутствует, то система производит вычисление значений W в

регулярно распределенных по территории пунктах. В каждом пункте значение коэффициента выполаживания вычисляется статистически, согласно критерию минимального квадратичного отклонения, на основании регрессионной зависимости между Π и K в пределах окрестности данного пункта и соседних окрестностей, окаймляющих данную. Такое перекрытие областей статистических вычислений обеспечивает плавность изменения коэффициента выполаживания по простиранию. На основании так или иначе полученных дискретных данных вычисляется поле коэффициента выполаживания в форме континуальной модели на базе конусных потенциалов.

Узлы, селективирующие из потока тот или иной вид информации, показаны на блок-схеме треугольниками, а узлы, рассылающие идентичную информацию по нескольким каналам, изображены окружностями. В прямоугольниках указаны производимые операции и их результаты. Гибридизированный символ $\{X\}$ означает, что в данном узле фигурирует либо (X) , либо $\{X\}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен новый метод учета косвенной информации в рамках линейной модели С.В. Гольдина при построении геологических карт в изолиниях, основанный на использовании расширенного степенного потенциоида \tilde{P}_V . Благодаря этому бикубические сплайны перестали выполнять роль главного формообразующего средства и восполнение разбросанных данных проводится исключительно интерполяционно. Предельные элементы потенциоида \tilde{P}_V обладают свойством, минимизирующим сложность образуемого рельефа, что дает возможность вообще избавиться от аппроксимационных операций в процессе учета косвенной информации. Метод обладает свойством инвариантности по отношению к линейной зависимости между „прямой“ и „косвенной“ поверхностями. В отличие от подхода, развиваемого в [2, 3], предлагаемый метод не требует явного применения трудоемких (и капризных) вариационных процедур решения некорректных задач с присущей им неопределенностью в выборе стабилизаторов. Опыт практического использования программной реализации данного метода показал его эффективность и хорошее качество результатов. Вместе с тем сравнение результатов применения обоих методов на одних и тех же исходных данных при моделировании геологических поверхностей в слоистой толще было бы весьма интересным и, скорее всего, оказалось бы плодотворным.

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Доказательство теоремы 1

Предположим, что существует линейная комбинация потенциалов, фигурирующих в формулировке теоремы, тождественно равная нулю:

$$D(t) = d_1|t - t_1| + \dots + d_k|t - t_k| + d_{k+1}|t - t_{k+1}| + \dots + d_K|t - t_K| \equiv 0. \quad (6)$$

Складывая значения левой части (6), вычисленные для $t = t_1$ и для $t = t_K$, получим равенство

$$(t_K - t_1) \sum_{k=1}^K d_k = 0, \text{ откуда } \sum_{k=1}^K d_k = 0, \text{ поскольку } (t_K - t_1) \neq 0.$$

Для любого отрезка $[t_j, t_{j+1}]$, вычитая значение левой части (6), вычисленное для $t = t_j$, из ее же значения, вычисленного для $t = t_{j+1}$, получим равенство

$$(t_{j+1} - t_j) \left(\sum_{k=1}^K d_k - 2 \sum_{k=j+1}^K d_k \right) = 0,$$

из которого в силу нулевой суммы всех d_k вытекает равенство

$$\sum_{k=j+1}^K d_k = 0.$$

По причине произвола в выборе j заключаем, что $d_k = 0, \forall k \in \overline{1K}$, т. е. все коэффициенты в $D(t)$ равны нулю и потенциалы $v(|t - t_k|)$ линейно независимы при любом наборе попарно различных t_k и любом натуральном K .

Как показано в [6], степенные потенциалы при $a \neq 0$ сильно линейно независимы и в одномерном случае ($m = 1$). Конусные же потенциалы в одномерном случае свойство сильной линейной независимости теряют. В самом деле, допустим, что левая часть (6) равна нулю на всем отрезке $[t_k, t_{k+1}]$. Тогда за счет соответствующих преобразований можно получить выражение

$$D(t) = \left(\sum_{k=1}^j d_k - \sum_{k=j+1}^K d_k \right) t - \left(\sum_{k=1}^j d_k t_k - \sum_{k=j+1}^K d_k t_k \right) = 0, \forall t \in [t_k, t_{k+1}].$$

Необходимыми и достаточными условиями для такого локального тождества являются равенства

$$d_1 + \dots + d_j - d_{j+1} - \dots - d_K = 0,$$

$$d_1 t_1 + \dots + d_j t_j - d_{j+1} t_{j+1} - \dots - d_K t_K = 0,$$

которые можно рассматривать как систему линейных уравнений для неизвестных d_k . Поскольку все t_k попарно различны, то любой минор второго порядка в матрице этой системы отличен от нуля, т. е. эта матрица имеет полный ранг. При $K = 2$ существует только нулевое решение, а при $K > 2$ система имеет множество нетривиальных решений. Таким образом, для любого интервала (т. е. одномерного открытого шара), не содержащего опорных точек, можно указать тождественно равную нулю нетривиальную линейную комбинацию конусных потенциалов, что и означает для них отсутствие сильной линейной независимости в одномерном случае. Этим доказательство завершается.

II. Доказательство теоремы 2.

Выражение для сужения конусного потенциала (4) на произвольную прямую L в R^m , проходящую через точку e вдоль единичного направляющего вектора \vec{l} , имеет в зависимости от „текущего“ параметра t вид

$$v(r(t)) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2} = \sum_{i=1}^m [(e_i + t l_i - y_i)]^{1/2} =$$

$$= \left[t^2 \sum_{i=1}^m l_i^2 - 2t \sum_{i=1}^m l_i (y_i - e_i) + \left(\sum_{i=1}^m l_i (y_i - e_i) \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^m l_i (y_i - e_i) \right)^2 + \sum_{i=1}^m (y_i - e_i)^2 \right]^{1/2}.$$

Свернув полный квадрат и переставив слагаемые, получим для $v(r(t))$ выражение

$$\left[\sum_{i=1}^m (y_i - e_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^m l_i (y_i - e_i) \right)^2 + \left(t - \sum_{i=1}^m l_i (y_i - e_i) \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Квадрат длины ортогональной проекции вектора $(y - e)$ на вектор l (второе слагаемое) не превосходит квадрата длины самого вектора $(y - e)$ (первое слагаемое), так что алгебраическая сумма этих слагаемых неотрицательна и может быть обозначена a^2 . Обозначая вычитаемое в третьем слагаемом за t_0 , можно записать сужение конусного потенциала на прямую L как

$$v_L(t) = v(r(t)) = a^2 + |t - t_0|^2, \quad (7)$$

т. е. мы пришли к выражению одномерного степенного потенциала.

Рассмотрим в R^m некоторое множество U , плотное в некотором открытом шаре H конечного радиуса. Пусть линейная комбинация потенциалов вида (4) равна нулю во всех точках множества U и в силу непрерывности во всем шаре

$$D(x) = \sum_{k=1}^K d_k v(r_k) = \sum_{k=1}^K d_k (a_k^2 + |x - x^k|^2)^{1/2} = 0 \quad \forall x \in H.$$

Эта линейная комбинация имеет, согласно (7), на прямой L сужение

$$D_L(t) = \sum_{k=1}^K d_k v(r_k(t)) = \sum_{k=1}^K d_k [a_k^2 + |t - t_k|^2]^{1/2}. \quad (8)$$

Здесь $a_k = 0$ тогда и только тогда, когда k -я опора лежит на прямой L . Пользуясь произвольным выбором точки привязки и направляющего вектора, рассмотрим прямую L , пересекающуюся с шаром по некоторому интервалу seg и в то же время не проходящую ни через одну из опорных точек. В [6] показано, что степенные потенциалы при $a_k \neq 0 \quad \forall k \in \overline{1, K}$ сохраняют сильную линейную независимость и в одномерном случае, а поскольку сужение (8) равно нулю на всем интервале seg , то коэффициенты $d_k = 0 \quad \forall k \in \overline{1, K}$. Это справедливо для произвольного шара, т. е. имеет место линейная независимость конусных потенциалов в сильном смысле. Теорема доказана.

III. Доказательство теоремы 3.

Прежде докажем лемму о свойстве суперпозиции решений системы линейных алгебраических уравнений

$$Au = f \quad (9)$$

с невырожденной квадратной матрицей A размерами $n \times n$. Будем рассматривать матрицу как линейный оператор, действующий в n -мерном векторном пространстве. Пусть ненулевой вектор-столбец правых частей представлен в виде суммы $f = f_1 + f_2$. Поскольку матрица A невырожденная, то существует единственное решение системы (9), которое представимо в виде $u = u_1 + u_2$, где $Au_1 = f_1$, $Au_2 = f_2$ и, следовательно, $A^{-1}f_1 = u_1$, $A^{-1}f_2 = u_2$. Возьмем в качестве правой части новый вектор-столбец $f' = \lambda f_1 + \mu f_2$, представляющий собой линейную комбинацию слагаемых прежнего. Системе уравнений вида (9) с той же матрицей A и новым вектор-столбцом правых частей удовлетворяет единственный n -мерный вектор v , т. е. $Av = f' = \lambda f_1 + \mu f_2$. Применяя к обеим частям этого равенства обратный оператор, получим

$$A^{-1}Av = v = \lambda A^{-1}f_1 + \mu A^{-1}f_2 = \lambda u_1 + \mu u_2.$$

Таким образом, справедлива следующая

лемма. *Решение системы с новой правой частью, являющейся линейной комбинацией слагаемых прежней правой части, представляет собой точно такую же линейную комбинацию соответствующих слагаемых прежнего решения.*

Для доказательства теоремы 3 рассмотрим применение процесса (5) к „чистой“ линейной модели, т. е. в случае, когда коэффициент выполаживания есть константа w по всей картируемой площади, а „прямая“ (z') и „косвенная“ (z) поверхности связаны по глубине абсолютно точной линейной зависимостью

$$z' = wz + d_0 + d_{-1}x + d_{-2}y = wz + b(x, y):$$

$$R(x, y) = \langle \Pi \rangle + w \times (\langle K \rangle - \langle \Pi \rangle + \langle \Pi \ominus (K) \rangle), \quad (10)$$

Здесь нам будет удобно обозначать общее число пунктов (x_j, y_j) в данных буквой n , ($j \in \{1, 2, \dots, n\}$). Дискретные данные, полученные в результате применения в (10) операции частичного вычитания $\Pi \ominus (K)$, содержат значения

$$z_j'' = z_j' - z_j = (w - 1)z_j + d_0 + d_{-1}x_j + d_{-2}y_j = (w - 1)z_j + b_j. \quad (11)$$

Конусная интерполяция $\tilde{s}'' = \langle \Pi \ominus (K) \rangle$ частичной разности в линейно расширенном потенциоиде \tilde{P}_V ищется через решение системы

$$A_{n+3}d'' = Z'' \quad (12)$$

с матрицей порядка $(n + 3)$ и вектором правых частей Z'' , набор координат которого $\{0, 0, 0, z_1'', \dots, z_n''\}$ составлен из нулевых правых частей условий, накладываемых на дополнительные элементы базиса, и из значений z_j'' . Исходя из (11), представим вектор правых частей в виде $Z'' = Z_1'' + Z_2'' = (w - 1) \cdot Z + 1 \cdot B$. Здесь вектор Z имеет набор координат $\{0, 0, 0, z_1, \dots, z_n\}$, а вектор B имеет набор координат $\{0, 0, 0, b_1, \dots, b_n\}$. В результате решения получается вектор d'' , координатами которого являются $(n + 3)$ коэффициентов $d_{-2}'', d_{-1}'', d_0'', d_1'', \dots, d_n''$ интерполяционного потенциал-полинома \tilde{s}'' . Вектор $d'' = d_Z'' + d_B''$, где $d_Z'' = (w - 1)A_{n+3}^{-1}Z$, $d_B'' = A_{n+3}^{-1}B$.

Конусная интерполяция $\tilde{s}' = \langle \Pi \rangle$ прямой информации аналогичным образом ищется через решение системы

$$A_{n+3}d' = Z', \quad (13)$$

где вектор Z' с набором координат $\{0, 0, 0, z_1', \dots, z_n'\}$ представляется в виде $Z' = Z_1' + Z_2' = w \cdot Z + 1 \cdot B$. Решением является вектор d' с координатами $d_{-2}', d_{-1}', d_0', d_1', \dots, d_n'$ — коэффициентами интерполяционного потенциал-полинома $\tilde{s}' \in \tilde{P}_V$. Здесь вектор $d' = d_Z' + d_B'$, где $d_Z' = w \cdot A_{n+3}^{-1}Z$, $d_B' = A_{n+3}^{-1}B$. Вектор-столбец правых частей системы (12) в соответствии с линейной моделью есть

$$Z'' = (w - 1) \cdot Z + 1 \cdot B = \frac{(w - 1)w}{w} \cdot Z + 1 \cdot B = \frac{w - 1}{w} \cdot Z_1' + Z_2'.$$

Таким образом, правая часть системы (12) представляет собой линейную комбинацию слагаемых правой части системы (13) и, согласно сформулированной выше лемме, решение системы (12) представимо в виде

$d'' = \frac{w - 1}{w} \cdot d_Z' + 1 \cdot d_B'$. Поэтому в разности конусных интерполяций $\tilde{s}'' - \tilde{s}' = \langle \Pi \ominus (K) \rangle - \langle \Pi \rangle$ общие слагаемые с координатами вектора d_B' в качестве коэффициентов при базисных функциях сокращаются, а остаются только слагаемые с координатами вектора $\frac{w - 1}{w} \cdot d_Z' - d_Z' = \frac{-1}{w} \cdot d_Z'$ в качестве коэффициентов.

В комбинации потенциал-полиномов $\langle \Pi \rangle + w (\langle \Pi \ominus (K) \rangle - \langle \Pi \rangle)$ присутствуют слагаемые с координатами вектора

$$d_Z' + 1 \cdot d_B' + \frac{-w}{w} d_Z' = d_B',$$

т. е. эта комбинация во всех этих пунктах принимает соответствующие значения $b(x_j, y_j)$. Линейное комбинирование потенциал-полиномов не выводит из линейно расширенного потенциоида \tilde{P}_V , поэтому комбинация $\langle \Pi \rangle + w (\langle \Pi \ominus (K) \rangle - \langle \Pi \rangle)$ есть интерполяционный потенциал-полином, принимающий во

всех этих пунктах значения полинома $b(x, y)$. Поскольку интерполяции в расширенном потенциоиде \tilde{P}_V являются точными на полиномах первой степени, рассматриваемый потенциал-полином совпадает с $b(x, y)$ всюду, т. е. имеет место тождество

$$\langle \Pi \rangle + w (\langle \Pi \ominus (K) \rangle - \langle \Pi \rangle) \equiv b(x, y).$$

Во всех n пунктах задания прямой информации комбинация $w(K) + \langle \Pi \rangle + w(\langle \Pi \ominus (K) \rangle - \langle \Pi \rangle)$ принимает, согласно линейной модели и условию теоремы, значения $z_j' = wz_j + d_0 + d_{-1}x_j + d_{-2}y_j = wz_j + b_j$. Таким образом, если „косвенная“ поверхность связана с „прямой“ поверхностью точной линейной зависимостью, то процесс (5), проведенный по любому неособенному (обеспечивающему однозначную разрешимость интерполяций) множеству из n пунктов, восстанавливает эту зависимость по всем (x, y) . Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гольдин С.В.** Линейные модели при анализе структурных взаимоотношений. Тюмень, 1971, с. 104—124 (Тр. ЗапСибНИГНИ, вып. 45).
2. **Пакет программ решения задач геологии нефти и газа** / Под ред А.М. Волкова. Тюмень, 1981, 117 с. (Тр. ЗапСибНИГНИ, вып. 161).
3. **Волков А.М.** Геологическое картирование нефтегазоносных территорий с помощью ЭВМ. М., Недра, 1988, 224 с.
4. **Леус В.А.** Решение задач геологической компьютерной картографии на основе потенциал-полиномов // Геология и геофизика, 1998, т. 39, № 10, с. 1423—1430.
5. **Леус В.А.** Показатель обусловленности матриц, возникающих в задачах генерирования функций многих переменных // Сиб. журн. вычисл. матем., 2003, т. 6, № 2, с. 159—169.
6. **Леус В.А.** О дифференциально обусловленном генерировании функций на базе степенных потенциалов // Сиб. журн. вычисл. матем., 1998, т. 1, № 4, с. 363—371.
7. **Игнатов М.И., Певный А.Б.** Натуральные сплайны многих переменных. Л., Наука, 1991, 126 с.
8. **Букреева Г.Ф., Красавчиков В.О., Саенко Л.С., Санин В.Я.** Сравнительный анализ макрорезервуаров нижней—средней юры Пудинского мегавала и прилегающих районов // Геология и проблемы поисков новых крупных месторождений нефти и газа в Сибири (Результаты работ по Межведомственной региональной научной программе „Поиск“ за 1994 год). Ч. I. Новосибирск, 1996, с. 93—96.
9. **Красавчиков В.О., Букреева Г.Ф., Санин В.Я., Саенко Л.С.** Геологическая модель флюидодинамической связи палеозойских и нижнесреднеюрских резервуаров нефти и газа в Западно-Сибирском бассейне // Геология и геофизика, 1998, т. 39, № 3, с. 307—315.
10. **Карташов А.А.** Особенности геологического строения верхнемальшевского резервуара на северном погружении Сургутского свода // Геология и геофизика, 1999, т. 40, № 2, с. 201—212.
11. **Красавчиков В.О., Беляев С.Ю., Букреева Г.Ф. и др.** Региональные структурные карты повышенной детальности по опорным отражающим горизонтам чехла северных и центральных районов Западно-Сибирской плиты // Актуальные вопросы геологии и географии Сибири. Т. 2. Геология нефти и газа (Материалы научной конференции, посвященной 120-летию основания Томского государственного университета, 1—4 апреля 1998 г., г. Томск). Томск, Изд-во Том. ун-та, 1998, с. 80—82.
12. **Красавчиков В.О.** Комплексная интерпретация слабо согласованных геолого-геофизических данных при построении региональных структурных карт (на примере осадочного чехла Западно-Сибирской плиты) // Геология и геофизика, 2002, т. 43, № 5, с. 456—469.

Рекомендована к печати 26 апреля 2004 г.
С.В. Гольдиным

Поступила в редакцию
9 октября 2003 г.