Геология и геофизика, 2005, т. 46, № 3, с. 339—351

УДК 517.95+517.923

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УПРУГОСТИ ДЛЯ ГОРИЗОНТАЛЬНО-СЛОИСТОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

А.Л. Карчевский

Институт математики СО РАН, 630090, Новосибирск, просп. Коптюга, 4, Россия

Предложен метод численного решения системы упругости для горизонтально-слоистой анизотропной среды. Решение системы упругости сводится к решению дифференциального матричного уравнения Риккати, которое в каждом слое имеет аналитическое решение. Представленный численный метод решения отличается от существующих аналогов и может быть применен для слоистой среды с любым видом анизотропии.

Система упругости, горизонтально-слоистая анизотропная среда, дифференциальное матричное уравнение Риккати.

NUMERICAL SOLUTION TO SYSTEM OF ELASTICITY EQUATIONS FOR LAYERED ANISOTROPIC MEDIA

A.L. Karchevsky

A system of elasticity equations for layered anisotropic media is solved numerically as the differential matrix Riccati equation, with analytical solutions for each layer. The suggested approach differs from the existing counterparts and is applicable to anisotropic media with layers of any anisotropy type.

System of elasticity, layered anisotropic medium, differential matrix Riccati equation

---

ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование волновых полей стало неотъемлемой частью современных обрабатывающих комплексов в сейсморазведке. Еще большее значение оно имеет на этапах интерпретации сейсмических данных. Его активно используют при идентификации и увязывании горизонтов, при сопоставлении окончательных результатов обработки с данными акустического каротажа и т. п. На нем основан метод „псевдоакустического каротажа“, представляющий собой одну из попыток решения обратной динамической задачи для реальных данных.

В основе существующих и активно используемых в практике методов математического моделирования, как правило, лежат уравнения акустики. Это связано с двумя фактами. Во-первых, математическое решение соответствующих задач хорошо изучено и не вызывает больших сложностей. Во-вторых, практическая сейсморазведка до недавнего времени была направлена на регистрацию, выделение и интерпретацию отраженных *P*-волн. Последнее позволяло достаточно хорошо приблизить окончательные результаты обработки реальных данных к решению задачи акустики.

Появившийся в последнее время интерес практической сейсморазведки к анализу нескольких компонент смещений и способам обработки данных, которые направлены на выделение и интерпретацию обменных волн типа *PS*, требует развития более сложного аппарата математического моделирования, чем существующие. Необходимо отметить, что первые работы по многоволновой сейсморазведке появились в России [1—7], а затем данные идеи стали широко применяться за рубежом (например, [8—14]). Уравнения акустики для учета влияния обменных волн оказываются неприемлемыми, и требуется использование уравнений, отвечающих теории упругости.

В настоящей работе рассматривается построение решения системы упругости для $x_3 = 0$, когда среда является горизонтально-слоистой и анизотропной. Алгоритмы численного расчета для системы упругости для горизонтально-слоистой изотропной среды известны [16—20]. Предлагаемый алгоритм решения отличается от известных. В разделе 9 дано сравнение полученного и уже существующих методов решения.

В качестве модели для источника возбуждения упругих колебаний выбран заглубленный точечный источник типа центра расширения, который может служить хорошим приближением для взрывных источников при наземных сейсмических работах или аэроганов, используемых при морских исследованиях.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим среду — *n*-слойную структуру с границами раздела x_3^k, $k = \overline{0, n}$, $x_3^0 = 0$; *m*-й слой находится при $x_3^{m-1} < x_3 < x_3^m$, последний $n + 1$ (подстилающий) слой $x_3^n < x_3 < \infty$. Физические свойства каждого слоя характеризуются величинами модулей упругости C_{mjkl} и плотностью ρ, т. е. C_{mjkl} и ρ — кусочно-постоянные функции переменной x_3, $0 < x_3 < \infty$. Источник вида

$$f(t)\nabla\delta(x_1, x_2, x_3 - x_3^*)$$

в начальный момент времени $t = 0$ возбуждает в среде упругие колебания. Источник находится в одном из слоев, т. е. $x_3^* \neq x_3^k$, $k = \overline{1, n}$.

Система упругости имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 \upsilon_m}{\partial t^2} = \sum_{j,k,l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_{mjkl}(x_3)\frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_k}\right) + f(t)\frac{\partial}{\partial x_m}\delta(x_1, x_2, x_3 - x_3^*), \tag{1}$$

$$m = \overline{1, 3},\ \ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+,\ \ t \in \mathbb{R}.$$

Начальные условия

$$\upsilon_m|_{t<0} = 0,\quad m = \overline{1, 3}. \tag{2}$$

Краевые условия

$$\sum_{k,l=1}^{3} C_{3jkl}(x_3)\frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_k}\Big|_{x_3=0} = 0,\quad j = \overline{1, 3}. \tag{3}$$

Условия склейки в точках (x_1, x_2, x_3^k)

$$\left[\sum_{k,l=1}^{3} C_{3jkl}(x_3)\frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_k}\right]_{x_3 = x_3^k} = 0,\ \ [\upsilon_j]_{x_3 = x_3^k} = 0,\ \ j = \overline{1, 3}. \tag{4}$$

Здесь обозначение $[f]_x$ означает $[f]_x = f(x + 0) - f(x - 0)$.

Целью настоящей работы является построение алгоритма нахождения величин

$$u_m(\nu_1, \nu_2, x_3 = 0, p),\quad m = \overline{1, 3}, \tag{5}$$

где $u_m(\nu_1, \nu_2, x_3, p)$ есть образ функции $\upsilon_m(x_1, x_2, x_3, t)$, $p = -\alpha + i\omega$ — параметр преобразования Лапласа по временной переменной t; ν_1 и ν_2 — параметры преобразования Фурье по пространственным переменным x_1 и x_2 соответственно.

2. НЕОБХОДИМЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОСТАНОВКИ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Проведем стандартные действия для задачи (1)—(4) с целью получить задачу для функций u_m. Примем во внимание хорошо известные соотношения для упругих постоянных $C_{mjkl}(x_3)$

$$C_{mjkl}(x_3) = C_{jmkl}(x_3) = C_{mjlk}(x_3) = C_{klmj}(x_3),\ \ C_{qp}(x_3) = C_{mjkl}(x_3),\ \ q = (mj), p = (kl),$$

$$(11) \to 1, (22) \to 2, (33) \to 3, (23) = (32) \to 4, (13) = (31) \to 5, (12) = (21) \to 6.$$

Тогда матрица независимых модулей упругости примет вид симметричной квадратной матрицы $C = \{C_{qp}\}$ порядка 6.

После преобразования Лапласа по переменной t, после преобразования Фурье по переменным x_1 и x_2 приходим к следующей постановке:

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(A\frac{\partial}{\partial x_3}U + i\hat{B}U\right) + i\check{B}\frac{\partial}{\partial x_3}U - DU = -f(p)\,(il_1\delta(x_3 - x_3^*) + l_2\delta'(x_3 - x_3^*)),\ \ x_3 \in \mathbb{R}_+, \tag{6}$$

$$\left(A\frac{\partial}{\partial x_3}U + i\hat{B}U\right)\Big|_{x_3=0} = 0, \tag{7}$$

$$\left[A\frac{\partial}{\partial x_3}U + i\hat{B}U\right]_{x_3^k} = 0,\ \ [U]_{x_3 = x_3^k} = 0,\ \ k = \overline{1, n}. \tag{8}$$

К данной постановке необходимо добавить условие затухания на бесконечности

$$U \to 0\ \ (x_3 \to \infty). \tag{9}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix},\ l_1 = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ 0 \end{bmatrix},\ l_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ A = \rho \begin{bmatrix} c_{55}\ c_{45}\ c_{35} \\ c_{45}\ c_{44}\ c_{34} \\ c_{35}\ c_{34}\ c_{33} \end{bmatrix},$$

$$\hat{B} = \rho\nu_1 \begin{bmatrix} c_{15}\ c_{56}\ c_{55} \\ c_{14}\ c_{46}\ c_{45} \\ c_{13}\ c_{36}\ c_{35} \end{bmatrix} + \rho\nu_2 \begin{bmatrix} c_{56}\ c_{25}\ c_{45} \\ c_{46}\ c_{24}\ c_{44} \\ c_{36}\ c_{23}\ c_{34} \end{bmatrix},\ \overset{\vee}{B} = \rho\nu_1 \begin{bmatrix} c_{15}\ c_{14}\ c_{13} \\ c_{56}\ c_{46}\ c_{36} \\ c_{55}\ c_{45}\ c_{35} \end{bmatrix} + \rho\nu_2 \begin{bmatrix} c_{56}\ c_{46}\ c_{36} \\ c_{25}\ c_{24}\ c_{23} \\ c_{45}\ c_{44}\ c_{34} \end{bmatrix},$$

$$D = \rho p^2 E + \rho\nu_1^2 \begin{bmatrix} c_{11}\ c_{16}\ c_{15} \\ c_{16}\ c_{66}\ c_{56} \\ c_{15}\ c_{56}\ c_{55} \end{bmatrix} + \rho\nu_2^2 \begin{bmatrix} c_{66}\ c_{26}\ c_{46} \\ c_{26}\ c_{22}\ c_{24} \\ c_{46}\ c_{24}\ c_{44} \end{bmatrix} + \rho\nu_1\nu_2 \begin{bmatrix} 2c_{16} & c_{12}+c_{66} & c_{14}+c_{56} \\ c_{12}+c_{66} & 2c_{26} & c_{25}+c_{46} \\ c_{14}+c_{56} & c_{25}+c_{46} & 2c_{45} \end{bmatrix},$$

и для приведеных модулей упругости используется обозначение $c_{qp} = C_{qp}/\rho$.

Нетрудно видеть, что матрицы A, D —- симметричные, $\hat{B}' = \overset{\vee}{B}$ (штрих обозначает операцию транспонирования) и матрица $B = \hat{B} + \overset{\vee}{B}$ также симметричная.

Таким образом, из (5) видно, что целью настоящей работы будет поиск значений вектор-функции U в точке $x_3 = 0$ при различных значениях параметров ν_1, ν_2, $p = -\alpha + i\omega$.

Для дальнейших рассуждений вектор-функцию U удобно представить в виде

$$U = U_1 + U_2,\ U_2 = \begin{cases} U_3,\ x_3^* < x_3 < \infty, \\ U_4,\ 0 < x_3 < x_3^*, \end{cases} \tag{10}$$

где U_1 — непрерывная и U_2 — разрывная части решения. Будем требовать, чтобы вектор-функции U_j, $j = 1, 3, 4$, удовлетворяли следующим условиям:

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(A \frac{\partial}{\partial x_3} U_j + i\hat{B} U_j\right) + i\overset{\vee}{B} \frac{\partial}{\partial x_3} U_j - DU_j = 0,\ j = 1, 3, 4,$$

$$\left[A \frac{\partial}{\partial x_3} U_j + i\hat{B} U_j\right]_{x_3^k} = 0,\ [U_j]_{x_3 = x_3^k} = 0,\ j = 1, 3, 4, \tag{11}$$

$$U_j \to 0\ \ (x_3 \to \infty),\ j = 1, 3.$$

Естественно, что соотношения для каждой вектор-функции U_j имеют место в своих областях изменения переменной x_3.

Подставляя вектор-функцию U в виде (10) в (6), получим следующее соотношение в точке x_3^*:

$$U_3|_{x_3 = x_3^* + 0} - U_4|_{x_3 = x_3^* - 0} = -f(p)A^{-1}l_2, \tag{12}$$

$$\left(A \frac{\partial}{\partial x_3} U_3 + i\hat{B} U_3\right)\Big|_{x_3 = x_3^* + 0} - \left(A \frac{\partial}{\partial x_3} U_4 + i\hat{B} U_4\right)\Big|_{x_3 = x_3^* - 0} = if(p)\,(\overset{\vee}{B} A^{-1} l_2 - l_1).$$

Краевое условие (7) примет вид

$$\left(A \frac{\partial}{\partial x_3} U_1 + i\hat{B} U_1\right)\Big|_{x_3 = 0} + \left(A \frac{\partial}{\partial x_3} U_4 + i\hat{B} U_4\right)\Big|_{x_3 = 0} = 0. \tag{13}$$

Нетрудно видеть, что вектор-функции U_1 и U_2 определены неоднозначно, с точностью до произвольного слагаемого. Данный факт будет нами использован ниже.

3. СВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ УПРУГОСТИ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ МАТРИЧНОМУ УРАВНЕНИЮ РИККАТИ

Хорошо известно, что уравнение или система уравнений второго порядка могут быть сведены с помощью специальной замены функций к дифференциальному уравнению Риккати (ДУР) или дифференциальному матричному уравнению Риккати (ДМУР). По всей видимости, впервые для построения численных алгоритмов, активно применяемых на практике, этот прием был использован в работе [15] для нахождения следа функции, удовлетворяющей обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка. Коэффициенты этого уравнения были кусочно-постоянные функции. Затем в работах [16, 17] данная идея была распространена на систему упругости. И в том и другом случаях использовался замечательный факт, что в каждом слое, где коэффициенты уравнений являются постоянными, ДУР или ДМУР имеет решение, которое можно выписать в аналитическом виде. Таким образом, зная краевое условие, которому удовлетворяет функция или матрица, на одном из концов отрезка изменения переменной x_3 (в данном случае $x_3 = \infty$) можно рекуррентно от слоя к слою пересчитать значения функции или матрицы, удовлетворяющих ДУР или ДМУР, до другого конца отрезка (в данном случае $x_3 = 0$) и, используя краевые условия, найти значение следа функции или вектор-функции, удовлетворяющей обыкновенному дифференциальному уравнению или системе дифференциальных уравнений второго порядка. Полезным для вычислений оказывается еще и тот факт, что аналитически решения ДУР или ДМУР можно записать так, что в записи будут участвовать экспоненты только с показателями, действительная часть которых меньше нуля, следовательно, при рекуррентном пересчете со слоя на слой при вычислениях на ЭВМ не будет накапливаться ошибка округления.

Далее свое применение для системы упругости данный алгоритм получил в работах [18—20].

Ниже, после того как мы опишем алгоритм, предлагаемый в этой работе, мы сравним его с алгоритмами в работах [16—20]. Предлагаемый в работе алгоритм так же, как и в известных работах, использует факт, что ДМУР имеет решение, которое можно получить в аналитическом виде, но ДМУР в данной работе и ДМУР в известных ранее работах строятся различным образом и, естественно, различны.

Возьмем одно из уравнений (11), опустив нижний индекс для краткости,

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(A\frac{\partial}{\partial x_3}U + i\hat{B}U\right) + i\check{B}\frac{\partial}{\partial x_3}U - DU = 0,\ \ x_3 \in (x_3^{m-1}, x_3^m). \tag{14}$$

Введем квадратную матрицу X порядка 3 следующим соотношением:

$$A\frac{\partial}{\partial x_3}U + i\hat{B}U = XU. \tag{15}$$

Подставим (15) в (14) и найдем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет матрица X. Оно может быть записано в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial x_3}X + (X + i\check{B})A^{-1}(X - i\hat{B}) = D. \tag{16}$$

Способ, который мы применим для решения ДМУР (16), похож на способ нахождения решения ДУР.

Пусть известно частное решение ДМУР (16). Обозначим его за R. Положим $X = Z + R$. Тогда уравнение для матрицы Z имеет вид дифференциального матричного уравнения Бернулли (ДМУБ)

$$\frac{\partial}{\partial x_3}Z + ZA^{-1}Z + \check{C}Z + Z\hat{C} = 0, \tag{17}$$

$$\hat{C} = A^{-1}(R - i\hat{B}),\ \ \check{C} = (R + i\check{B})A^{-1}. \tag{18}$$

Решение ДМУБ строится следующим образом. Введем матрицу $L = Z^{-1}$. Нетрудно проверить, что матрица L будет удовлетворять следующему матричному уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial x_3}L = A^{-1} + L\check{C} + \hat{C}L, \tag{19}$$

решение которого, если матрицы A, $\hat{C}$, $\check{C}$ постоянные, дается формулой

$$L = e^{\hat{C}(x_3 - x_3^m)}\left[L(x_3^m) + \int_{x_3^m}^{x_3} e^{-\hat{C}(s - x_3^m)}A^{-1}e^{-\check{C}(s - x_3^m)}\,ds\right]e^{-\check{C}(x_3 - x_3^m)}. \tag{20}$$

Таким образом, зная матрицы L и R, легко определяем матрицу X в любой точке $x_3 \in [x_3^{m-1}, x_3^m]$.

Как находить мартицу R — частное решение матричного уравнения (16), какие должны быть начальные условия для матричного уравнения (16), будет сказано ниже.

4. ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ СЛЕДА РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УПРУГОСТИ

Для вектор-функций U_j ($j = 1, 3, 4$), удовлетворяющих дифференциальным уравнениям из соотношений (11), введем матрицы X, Y и S при помощи следующих выражений:

$$A\frac{\partial}{\partial x_3}U_1 + i\hat{B}U_1 = SU_1,\; A\frac{\partial}{\partial x_3}U_3 + i\hat{B}U_3 = XU_3,\; A\frac{\partial}{\partial x_3}U_4 + i\hat{B}U_4 = YU_4. \tag{21}$$

Каждая из функций удовлетворяет своему ДМУР типа (16) в своей области определения для переменной x_3 (смотрите (10)).

Из соотношений (12) в точке x_3^* получим

$$U_3^* - U_4^* = l_3,\; X^*U_3^* - Y^*U_4^* = l_4, \tag{22}$$

$$l_3 = -f(p)\,A^{-1}l_1,\; l_4 = if(p)\,(\check{B}A^{-1}l_1 - l_2)$$

(звездочка означает, что значения функций рассматривается в точке $x_3 = x_3^*$).

Из (22) получим

$$U_4^* = (X^* - Y^*)^{-1}l_5,\; l_5 = X^*l_3 - l_4. \tag{23}$$

В силу произвольности представления вектор-функции U, о котором мы упоминали в конце раздела 2, мы можем считать, что матрица Y^*, т. е. матрица Y в точке $x_3 = x_3^*$, нам известна. О том, какой она имеет конкретный вид, будет сказано ниже. Необходимо отметить, что матрица Y^* должна быть выбрана так, чтобы в выражении (23) матрица $(X^* - Y^*)^{-1}$ существовала.

Нетрудно видеть, что из (21) следует

$$U_4^0 = KU_4^*, \tag{24}$$

где K — матрицант (см. [22]) для третьего уравнения (21) (нуль в верхнем индексе означает, что значения функций берутся в точке $x_3 = 0$).

Из краевого условия (13) имеем

$$S^0U_1^0 + Y^0U_4^0 = 0.$$

Откуда с учетом (24) имеем

$$U^0 = U_1^0 + U_4^0 = -(S^0)^{-1}(S^0 - Y^0)\,K\,(X^* - Y^*)^{-1}l_5. \tag{25}$$

Таким образом, значения элементов матриц S, Y, X в точках $x_3 = 0$ и $x_3 = x_3^*$, значения элементов матрицы Y на отрезке $[0, x_3^*]$ полностью определяют значение вектор-функции U в точке $x_3 = 0$. Следовательно, необходимо уметь решать ДМУР.

5. РЕШЕНИЕ МУР

В разделе 3 было приведено выражение, дающее решение ДМУР в случае, когда матрицы-коэффициенты являются постоянными. Таким образом, вопрос решения данного матричного уравнения сводится к умению находить частное решение ДМУР и определять начальные условия на интервале, на котором данное матричное уравнение решается.

Пусть $x_3 \in [x_3^{m-1}, x_3^m]$, m — любое натуральное число из $\overline{1, n}$. Для каждого такого интервала матрицы A, D, $\hat{B}$, $\check{B}$ являются постоянными.

Условия склейки (8), равенство (15) дают в силу произвольности вектор-функции U условия склейки для матрицы X, как решения матричного дифференциального уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами на отрезке $x_3 \in [x_3^*, x_3^n]$:

$$[X]_{x_3^k} = 0. \tag{26}$$

Те же самые условия склейки имеют место и для матриц S и Y в своих областях определения.

Итак, выберем некоторый интервал $[x_3^{m-1}, x_3^m]$ и проведем дальнейшие рассуждения.

Заметим, что решение МУР

$$(X + i\check{B})A^{-1}(X - i\hat{B}) = D \tag{27}$$

является частным решением ДМУР (16). Более того, если в какой-то точке $x_3 \in [x_3^{m-1}, x_3^m]$ решение ДМУР равно решению МУР (27), то решение ДМУР в силу теоремы единственности равно ему всюду на интервале $[x_3^{m-1}, x_3^m]$, т. е. является постоянным.

Таким образом, чтобы научиться решать ДМУР (16) необходимо научиться решать МУР (27).

Нетрудно видеть, что для матриц $\hat{C}$ и $\check{C}$, введенных соотношениями (18), уравнение (27) примет вид

$$\check{C}A\hat{C} = D. \tag{28}$$

Матрицы $\hat{C}$ и $\check{C}$ связаны соотношениями

$$X = A\hat{C} + i\hat{B},\ X = A\check{C} - i\check{B},\ \check{C} = A\hat{C}A^{-1} + iBA^{-1}. \tag{29}$$

Заменяя в (28) матрицу $\check{C}$ ее выражением через матрицу $\hat{C}$ (29), приходим к следующему уравнению:

$$A\hat{C}^2 + iB\hat{C} - D = 0. \tag{30}$$

Привлекая материал приложения, имеем, во-первых, собственные числа матриц, удовлетворяющих уравнению (20), должны удовлетворять уравнению

$$\zeta(\lambda) = |A\lambda^2 + iB\lambda - D| = 0, \tag{31}$$

во-вторых, способ построения матрицы $\hat{C}$.

Нетрудно видеть, что уравнение (31) есть не что иное, как характеристическое уравнение для системы упругости (6).

Необходимо отметить следующий факт. Известно, что в анизотропной среде в общем случае распространяются три волны — две квазипоперечных и одна квазипродольная. Шесть собственных чисел (решений уравнения (31)) должны распасться на две группы: три собственных числа λ_j $(j = \overline{1, 3})$ будут иметь положительную действительную часть, а три λ_j $(j = \overline{4, 6})$ — отрицательную. Это объясняется тем, что в среде распространяются два вида волн — падающие и отраженные. В некоторых случаях происходит слияние квазипоперечных волн, и в среде распространяются две волны — поперечная и продольная. Математически это будет проявляться в том, что два корня λ_1 и λ_2 могут совпадать, а корень λ_3 будет всегда отличен от корней λ_1 и λ_2. Мы можем наблюдать данное положение вещей на примере изотропной среды — в среде распространяются две волны продольная и поперечная, скорость продольной волны всегда больше поперечной, характеристическое уравнение (31) для изотропной среды примет вид

$$\zeta(\lambda) = (\lambda^2 - \lambda_1^2)^2(\lambda^2 - \lambda_3^2).$$

Итак, решая задачу (31), имеем шесть корней (среди которых могут быть кратные) — три с положительной действительной частью, три с отрицательной действительной частью.

Из всего разнообразия возможных различных троек чисел λ_k, $k = \overline{1, 6}$, выберем только две. Первая тройка будет содержать только λ_k с отрицательными действительными частями, вторая тройка будет содержать только те λ_k, которые имеют только положительные действительные части.

Почему мы останавливаем наш выбор только на этих тройках? Обратим внимание на представление (15), откуда следует, что вектор-функция U на отрезке $[x_3^{m-1}, x_3^m]$ является решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x_3} U = \hat{C} U. \tag{32}$$

Очевидно, если матрица $\hat{C}$ имеет все собственные числа с положительными действительными частями, то

$$\lim_{x_3^m \to \infty} U = \infty,$$

а если матрица $\hat{C}$ имеет все собственные числа с отрицательными действительными частями, то

$$\lim_{x_3^m \to \infty} U = 0.$$

Обозначим

$$X_{(+)}^m = A\hat{C} - i\hat{B},\ X_{(-)}^m = A\hat{C} - i\hat{B},$$

где матрица $\hat{C}$ строится с использованием набора собственных чисел с положительными и отрицательными действительными частями соответственно, индекс m означает, что значения матриц A, D, $\hat{C}$, $\check{C}$ берутся на интервале $[x_3^{m-1}, x_3^m]$.

Таким образом, если в точке $x_3^n + 0$ положить условие

$$X = X_{(-)}^{n+1}, \tag{33}$$

то в подстилающем слое (x_3^n, ∞) решение ДМУР (16) будет постоянным, соответствующее решение уравнения (32) будет затухать на бесконечности, что отвечает краевым условиям в соотношениях (11) и краевому условию (9).

В силу условия склейки (26) получим, что известно краевое условие X^n для решения ДМУР на интервале $[x_3^{n-1}, x_3^n]$. Решив ДМУР на этом интервале, будем знать значение матрицы X в точке $x_3^{n-1} + 0$. Используя условия склейки (26), получим краевое условие X^{n-1} для решения ДМУР на интервале $[x_3^{n-2}, x_3^{n-1}]$ и так далее, т. е. будем переходить со слоя на слой.

В качестве частного решения ДМУР (16) на интервале $[x_3^{m-1}, x_3^m]$ возьмем матрицу $X_{(+)}^m$.

Как уже упоминалось в разделе 4, мы считали, что Y^* — известная матрица, сейчас мы можем определить ее. Положим $Y^* = X_{(+)}^k$ (k — номер слоя, в котором лежит точка x_3^*). Заметим, что X^*, где бы ни лежала точка x_3^* в интервале (x_3^{k-1}, x_3^k), нигде не совпадает с матрицей Y^*. В противном случае вследствие теоремы единственности матрица X являлась бы постоянной на интервале $[x_3^*, x_3^k]$.

6. ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦ $\hat{C}$ И $\check{C}$

В приложении дается путь, как строить решения матричного уравнения (30). Опишем данный путь решения применительно к нашему случаю.

Выберем из собственных чисел λ_j $(j = \overline{1, 6})$ характеристического уравнения тройку собственных значений, составим матрицу $\hat{J}$, имеющую жорданову форму. Матрицу $\hat{C}$ будем искать в виде $T_1\hat{J}T_1^{-1}$.

Для корней λ_j $(j = \overline{1, 3})$ возможны два случая (с точностью до перенумерации):

$$1)\ \lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_1 \neq \lambda_3,\ \lambda_2 \neq \lambda_3;\quad 2)\lambda_1 = \lambda_2,\ \lambda_1 \neq \lambda_3.$$

Рассмотрим первый случай. Матрица $\hat{J}$ имеет диагональный вид. Пусть $T_1 = \{t_{mj}\}$, для компонент матрицы T_1 будем иметь следующую однородную систему:

$$AT_1\hat{J}^2 + iBT_1\hat{J} - DT_1 = 0, \tag{34}$$

откуда получим

$$A\begin{bmatrix} t_{11}\lambda_1^2 & t_{12}\lambda_2^2 & t_{13}\lambda_3^2 \\ t_{21}\lambda_1^2 & t_{22}\lambda_2^2 & t_{23}\lambda_3^2 \\ t_{31}\lambda_1^2 & t_{32}\lambda_2^2 & t_{33}\lambda_3^2 \end{bmatrix} + iB\begin{bmatrix} t_{11}\lambda_1 & t_{12}\lambda_2 & t_{13}\lambda_3 \\ t_{21}\lambda_1 & t_{22}\lambda_2 & t_{23}\lambda_3 \\ t_{31}\lambda_1 & t_{32}\lambda_2 & t_{33}\lambda_3 \end{bmatrix} - D\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} = 0.$$

Нетрудно видеть, что для каждого столбца матрицы T_1 имеет место однородная система уравнений:

$$[A\lambda_j^2 + iB\lambda_j - D]\begin{bmatrix} t_{1j} \\ t_{2j} \\ t_{3j} \end{bmatrix} = 0,\ j = \overline{1, 3}. \tag{35}$$

Поскольку λ_j $(j = \overline{1, 3})$ являются собственными числами характеристического уравнения системы упругости, то $\det\,[A\lambda_j^2 + iB\lambda_j - D] = 0$, и поскольку все λ_j различны, то $\operatorname{rank}\,[A\lambda_j^2 + iB\lambda_j - D] = 2$, следовательно, можем построить матрицу T_1, столбцами которой являются решения системы (35).

Перейдем ко второму случаю, когда $\lambda_1 = \lambda_2$. Существует две возможности:

$$1)\ \operatorname{rank}\,[A\lambda_1^2 + iB\lambda_1 - D] = 1,\ \ 2)\ \operatorname{rank}\,[A\lambda_1^2 + iB\lambda_1 - D] = 2.$$

Если реализуется первая возможность, то матрица $\hat{J}$ выбирается в виде

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix},$$

может быть получена однородная система, аналогичная системе (35). Отличие будет только в том, что, поскольку ранг соответствующей матрицы будет равен единице, то для собственного числа λ_1 строится два линейно независимых собственных вектора.

Когда же реализуется вторая возможность, матрица $\hat{J}$ выбирается в виде

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix},$$

для которой строим соответствующую систему, аналогичную системе (35). Путь нахождения первого вектор-столбца ничем не отличается от первого случая, поскольку ранг соответствующей матрицы равен двум, то такой вектор-столбец будет найден. Для второго вектор-столбца матрицы T_1 система будет отличной от системы (35). Она будет иметь вид

$$[A\lambda_1^2 + iB\lambda_1 - D]\begin{bmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ t_{32} \end{bmatrix} + [2A\lambda_1 + iB]\begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \end{bmatrix} = 0, \tag{36}$$

откуда второй вектор-столбец для матрицы T_1 также будет найден.

Путь же нахождения вектор-столбца, соответствующего λ_3, ничем не отличается от ранее изложенного первого случая.

Таким образом, описано, как получить матрицу T_1, следовательно, можем построить T_1^{-1}, т. е. получим $\hat{C} = T_1\hat{J}T_1^{-1}$. Заметим, что данная форма записи матрицы $\hat{C}$ весьма удобна, поскольку нам при численном решении ДМУР необходимо иметь выражение для матричной экспоненты $\exp\{\hat{C}x_3\} = T_1 \exp\{\hat{J}x_3\} T_1^{-1}$.

Матрица $\check{C}$ может быть найдена из последнего соотношения в (29). Однако есть более предпочтительный путь.

Заменяя в (28) матрицу $\hat{C}$ ее выражением через матрицу $\check{C}$ (29), приходим к следующему уравнению:

$$\check{C}^2 A - \check{C}(iB) - D = 0. \tag{37}$$

Из материала раздела 10 имеем, во-первых, собственные числа матриц, удовлетворяющих уравнению (37), должны удовлетворять уравнению

$$f(\xi) = |A\xi^2 - iB\xi - D| = 0, \tag{38}$$

во-вторых, способ построения матрицы $\check{C}$.

Нетрудно видеть, что решения ξ_j уравнения (38) связаны с решениями уравнения (31) простым соотношением:

$$\xi_j = -\lambda_j,\ j = \overline{1, 6}. \tag{39}$$

Способ построения матрицы $\check{C}$ совпадает со способом построения матрицы $\hat{C}$.

Матрица $\check{C}$ будет искаться в виде $T_2\check{J}T_2^{-1}$. Для матрицы T_2^{-1} будем иметь однородную систему

$$\check{J}^2\, T_2^{-1}A - \check{J}T_2^{-1}(iB) - T_2^{-1}D = 0. \tag{40}$$

Введем обозначения

$$T_3 = (T_2^{-1})',\ \tilde{J} = \check{J}'.$$

Применим операцию транспонирования к матричному уравнению (40), после чего получим

$$AT_3\tilde{J}^2 - iBT_3\tilde{J} - DT_3 = 0. \tag{41}$$

Если в случае rank $[A\xi_1^2 - iB\xi_1 - D] = 2$ в качестве известной матрицы $\check{J}$ использовать матрицу следующего вида:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 1 & \xi_1 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 \end{bmatrix},$$

то получаем, что матричное уравнение (41) по определению матрицы T_3 может быть решено аналогично (34). Более того, построение матрицы $\check{C}$ может идти параллельно с построением матрицы $\hat{C}$.

7. ФОРМУЛА РЕШЕНИЯ ДМУР

После того, как получены матрицы $\hat{C}$, $\check{C}$, $X^m_{(+)}$, можно получить аналитическое выражение для матрицы X в любой точке $x_3 \in [x_3^{m-1}, x_3^m]$. Из (20) имеем

$$X = X^m_{(+)} + T_2 H^{-1} T_1^{-1}, \tag{42}$$

$$H = e^{\hat{J}(x_3 - x_3^m)} G e^{\check{J}(x_3 - x_3^m)} + e^{\hat{J}(x_3 - x_3^m)} \left(\int\limits_{x_3^m}^{x_3} e^{-\hat{J}(s - x_3^m)} F e^{-\check{J}(s - x_3^m)} \, ds \right) e^{\check{J}(x_3 - x_3^m)},$$

$$G = T_1^{-1}(X^m - X^m_{(+)})^{-1} T_2, \;\; F = T_1^{-1} A^{-1} T_2.$$

Полагая в соотношении (42) вместо переменной x_3 значение x_3^{m-1}, получаем рекуррентные формулы для пересчета со слоя на слой.

Нетрудно убедиться, что после выполнения необходимых действий по интегрированию и перемножению соответствующих матриц, в выражениях элементов матрицы H будут участвовать экспоненты только с показателями, действительная часть которых меньше нуля.

Например, матрица H для слоя, который является трансверсально-изотропной средой с осью бесконечной симметрии, расположенной в плоскости Ox_1x_2, и для которого все λ_j $(j = \overline{1, 3})$ различны (для данного вида анизотропии можно легко показать, что $\lambda_{j+3} = -\lambda_j$), имеет вид

$$\{H_{nk}\};\; H_{nk} = G_{nk}\kappa^2_{nk} - F_{nk}\kappa^1_{nk}$$

$$\kappa^1_{nk} = e^{(\lambda_n + \lambda_k)(x_3 - x_3^m)},\;\; \kappa^2_{nk} = \frac{1}{\lambda_n + \lambda_k}(1 - e^{(\lambda_n + \lambda_k)(x_3 - x_3^m)}),\;\; n, k = \overline{1, 3},$$

G_{nk} и F_{nk} — компоненты матриц G и F. Если в записи матрицы H положить $\lambda_1 = \lambda_2$, взять λ_1 и λ_3 как решения, соответствующие анизотропной среде, то получим вид матрицы H для изотропной среды.

В заключение необходимо сделать два замечания. Во-первых, исходя из вышеизложенного материала, нетрудно видеть, что

$$S = X, \quad \forall x_3 \in [x_3^*, \infty).$$

Во-вторых, анализируя формулы получения вектора $U|_{x_3 = 0}$, становится очевидным, что они имеют смысл при любых неотрицательных значениях параметров преобразования Фурье (ν_1, ν_2). Выражения не теряют смысл даже для вырожденных случаев $(0, \nu_2)$, $(\nu_1, 0)$, $(0, 0)$, предельный переход, когда ν_1 и(или) ν_2 стремятся к нулю, непрерывен.

8. ПОЛЕЗНОЕ УПРОЩЕНИЕ

Часто можно предполагать, что $x_3^* \in [0, x_3^1]$. В этом случае $Y = Y_{(+)}$, $\forall x_3 \in [0, x_3^*]$. Если так, то легко строится матрица K из равенства (24).

Например, если первый слой является изотропной средой, то можем получить явный вид матрицы K

$$K = \frac{1}{\lambda_3\lambda_1 - \nu^2}\begin{bmatrix} (\lambda_3\lambda_1 - \nu_2^2)e^{-\lambda_1 x_3^*} - \nu_1^2 e^{-\lambda_3 x_3^*} & \nu_1\nu_2(e^{-\lambda_1 x_3^*} - e^{-\lambda_3 x_3^*}) & -i\nu_1\lambda_1(e^{-\lambda_1 x_3^*} - e^{-\lambda_3 x_3^*}) \\ \nu_1\nu_2(e^{-\lambda_1 x_3^*} - e^{-\lambda_3 x_3^*}) & (\lambda_3\lambda_1 - \nu_1^2)e^{-\lambda_1 x_3^*} - \nu_2^2 e^{-\lambda_3 x_3^*} & -i\nu_2\lambda_1(e^{-\lambda_1 x_3^*} - e^{-\lambda_3 x_3^*}) \\ -i\nu_1\lambda_3(e^{-\lambda_1 x_3^*} - e^{-\lambda_3 x_3^*}) & -i\nu_2\lambda_3(e^{-\lambda_1 x_3^*} - e^{-\lambda_3 x_3^*}) & \lambda_3\lambda_1 e^{-\lambda_3 x_3^*} - \nu^2 e^{-\lambda_1 x_3^*} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что если бы первый слой был анизотропной средой, то матрица K может быть получена численно в следующем виде:

$$K = T_1 e^{-\hat{J} x_3^*} T_1^{-1}.$$

9. ОБСУЖДЕНИЕ И СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Из вышеприведенного материала работы становится ясной схема решения:

- имеем постановку прямой задачи для системы упругости в слоистой среде;

- из системы упругости получаем ДМУР; для каждого слоя существует аналитическое выражение для решения данной задачи, условия склейки (26) позволяют вести рекуррентный пересчет со слоя на слой;

- получив необходимые величины (смотрите соотношение (25)), получаем значение вектора $U|_{x_3 = 0}$.

В ранее опубликованных работах [16—21] схема решения иная:

- имеем постановку прямой задачи для системы упругости в слоистой среде;

- получаем представление решения системы упругости в терминах векторного и скалярного потенциалов [16, 17] или в терминах функций, играющих роль данных потенциалов [19];

- получаем ДМУР, которое следует из системы уравнений для потенциалов; для каждого слоя существует аналитическое выражение для решения ДМУР, которое позволяет вести рекуррентный пересчет со слоя на слой; условия склейки, полученные для потенциалов, позволяют получить условия склейки для решений ДМУР;

- получив необходимые величины, вычисляют значения потенциалов в точке $x_3 = 0$; используя представление решения системы упругости через потенциалы, получают значение смещений в точке $x_3 = 0$.

Как видим, в ранее опубликованных работах присутствует дополнительный шаг — представление решения системы упругости в терминах векторного и скалярного потенциалов или в терминах функций, играющих роль потенциалов.

Заметим, что в работах [16, 17] рассуждения ведутся для системы упругости для изотропной среды, в работе [18] — для изотропной среды с поглощением, в работе [19] — для трансверсально-изотропной среды, когда ось бесконечной симметрии расположена по оси Ox_3. В этих случаях присутствует цилиндрическая симметрия, и система упругости во всех случаях может быть сведена к постановке задачи для двух уравнений для продольных и поперечных смещениий.

Очевидна причина, по которой авторы цитируемых работ используют представление решения системы упругости через потенциалы. В этом случае ДМУР, полученное из системы уравнений на компоненты потенциалов, имеет достаточно простой вид

$$\frac{\partial}{\partial x_3} S + S^2 = D. \tag{43}$$

Здесь матрицы S, D порядка 2, D — диагональная матрица.

Математическая сложность заключается в виде представления, который имеют смещения через компоненты потенциала. Например, в работах [16, 17] имеют место следующие соотношения:

$$u_r = -\nu\phi - \nu \frac{\partial\psi}{\partial x_3}, \;\; u_z = \frac{\partial\phi}{\partial x_3} + \nu^2\psi, \tag{44}$$

где функции ψ и ϕ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2} = \lambda_3^2\psi, \;\; \frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} = \lambda_1^2\phi.$$

Как видим, функция u_r пропорциональна ν ($\nu^2 = \nu_1^2 + \nu_2^2$). При переформулировке условий склейки и условий в точке расположения источника в терминах потенциалов эта пропорциональность приводит к тому, что появляются выражения, содержащие неопределенность типа 0/0 при стремлении ν к нулю. При анализе формул работ [16, 17] данные неопределенности удается выделить и представить формулы свободными от них.

Аналогичные трудности возникают и в других цитируемых работах.

Была предпринята попытка для системы уравнений упругости, состоящей из трех уравнений, применить подход работы [19].

Для изотропной среды были получены следующие соотношения:

$$u_1 = i\nu_1\psi + i\nu_1 \frac{\partial\phi_1}{\partial x_3},$$

$$u_2 = i\nu_2\psi + i\nu_2 \frac{\partial\phi_2}{\partial x_3}, \tag{45}$$

$$u_3 = \frac{\partial\psi}{\partial x_3} + \nu_1^2\phi_1 + \nu_2^2\phi_2,$$

где функции ψ и ϕ_j удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2} = \lambda_3^2\psi,\ \frac{\partial^2\phi_1}{\partial x_3^2} = \lambda_1^2\phi_1,\ \frac{\partial^2\phi_2}{\partial x_3^2} = \lambda_1^2\phi_2.$$

Для трансверсально-изотропной среды с осью бесконечной симметрии, лежащей в плоскости Ox_1x_2, были получены соотношения

$$u_1 = iN_{11}\frac{\partial\phi}{\partial x_3} + iN_{12}\frac{\partial\psi}{\partial x_3} + iN_{13}\chi,$$

$$u_2 = iN_{21}\frac{\partial\phi}{\partial x_3} + iN_{22}\frac{\partial\psi}{\partial x_3} + iN_{23}\chi, \tag{46}$$

$$u_3 = N_{31}\phi + N_{32}\psi + N_{33}\frac{\partial\chi}{\partial x_3},$$

где функции ψ, ϕ и χ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} = \lambda_1^2\phi,\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2} = \lambda_2^2\psi,\ \frac{\partial^2\chi}{\partial x_3^2} = \lambda_3^2\chi. \tag{47}$$

Коэффициенты N_{nm} находятся подстановкой выражений для u_j в систему упругости (14).

Как видно, в (45) функции u_1 и u_2, представленные через функции, играющие роль потенциалов, пропорциональны ν_1 и ν_2 соответственно. Не приводим выражений для коэффициентов N_{nm}, но заметим, что коэффициенты N_{nm} ($n = 1, 2$, $m = \overline{1, 3}$) будут пропорциональны величинам $c_{nm}^{(1)}\nu_1 + c_{nm}^{(2)}\nu_2$ ($c_{nm}^{(k)}$ — некоторые постоянные).

Таким образом, проводя переформулировку условий склейки (8) для ДМУР, следующей из системы уравнений для фукций $\{\phi_1, \phi_2, \psi\}$ или $\{\phi, \psi, \chi\}$, и получая выражения типа (25) и условия склейки, будем иметь, что различные матрицы перехода, имеющие компоненты, в значения которых входят величины N_{nm}, при малых значениях ν_1 и ν_2 будут плохо обусловлены (на практике $\nu_n = 10^{-4} \div 10^{-2}$).

В некоторых частных случаях удается избежать в выражениях неопределенности типа 0/0 при стремлении ν_1 или(и) ν_2 к нулю, например, при получении условий склейки для решения ДМУР на границе двух изотропных слоев. Однако при получении выражений для склейки решений ДМУР на границе, разделяющей изотропный и анизотропный слой, в выражениях будут присутствовать члены вида $(c_{nm}^{(3)}\nu_1 + c_{nm}^{(4)}\nu_2)/\nu_j$ ($j = 1, 2$ и $c_{nm}^{(k)}$ — некоторые постоянные), т. е., вообще говоря, при стремлении ν_j к нулю выражения теряют смысл.

Таким образом, случаи, когда пара $\{\nu_1, \nu_2\}$ может принимать значения $\{0, \nu_2\}$, $\{\nu_1, 0\}$, $\{0, 0\}$, требуют отдельного рассмотрения и нет непрерывности предельного перехода при $\nu_j \to 0$ ($j = 1, 2$).

Необходимо отметить следующий факт. Вполне вероятно, что представления типа (44)—(47) в цитируемых работах стали возможны только благодаря тому, что характеристическое уравнение системы упругости имеет парные решения, т. е. $\lambda_j = -\lambda_{3+j}$ ($j = \overline{1, 3}$). Например, для общего случая анизотропной среды системы уравнений второго порядка типа (47) получить невозможно. Формально можно выписать систему уравнений следующего типа:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} - (\lambda_1 + \lambda_4)\frac{\partial\phi}{\partial x_3} + \lambda_1\lambda_4\phi = 0,$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2} - (\lambda_2 + \lambda_5)\frac{\partial\psi}{\partial x_3} + \lambda_2\lambda_5\psi = 0, \tag{48}$$

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial x_3^2} - (\lambda_3 + \lambda_5)\frac{\partial\chi}{\partial x_3} + \lambda_3\lambda_6\chi = 0.$$

Однако встает вопрос, как группировать полученные численно λ_j ($j = \overline{1, 6}$), чтобы при предельном переходе от общего к частному виду анизотропии (т. е. когда $\lambda_{j+3} = -\lambda_j$) был бы непрерывный переход от систем вида (48) к (47). Очевидно также, что соответсвующее ДМУР уже не будет иметь вид (43).

Вообще говоря, вызывает сомнение, будут ли вообще возможны выражения типа (46) для u_j, где соответствующие функции берутся в виде (48).

Описанные в данном разделе трудности можно легко избежать, отказавшись от лишнего перехода к потенциалам при решении задачи, как это видно из описания представленного в данной статье метода решения. Представленный метод решения годится для слоистой среды с любым видом анизотропии. Склейка соответствующих решений ДМУР для слоев с разным видом анизотропии происходит по тривиальной формуле (26).

Программы для слоистой среды, где слои являются изотропной средой и анизотропной средой некоторого частного вида, реализованы автором на ЭВМ.

10. ПРИЛОЖЕНИЕ. РЕШЕНИЕ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ

В работе были использованы следующие сведения из решений матричных уравнений [22]. Рассмотрим уравнения

$$\Xi_0\Omega_1^m + \Xi_1\Omega_1^{m-1} + \ldots + \Xi_m = 0, \tag{49}$$

$$\Omega_2^m\Xi_0 + \Omega_2^{m-1}\Xi_1 + \ldots + \Xi_m = 0, \tag{50}$$

где Ξ_i, $i = \overline{0, m}$ — заданные, а Ω_1 и Ω_2 искомые квадратные матрицы порядка n.

Теорема 10.1. Каждое решение уравнения (49) удовлетворяет скалярному уравнению

$$\zeta(\Omega_1) = 0,\ \ \zeta(\lambda) = |\Xi_0\lambda^m + \Xi_1\lambda^{m-1} + \ldots + \Xi_m|.$$

Этому же скалярному уравнению удовлетворяет и любое решение Ω_2 **матричного уравнеия (50).**

Пусть функция $\zeta(\lambda)$ имеет вид

$$\zeta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{a_1}(\lambda - \lambda_2)^{a_2} \ldots (\lambda - \lambda_h)^{a_h}. \tag{51}$$

Квадратная матрица Ω_1 порядка n — решение уравнения $g(\Omega_1) = 0$. Минимальный многочлен матрицы Ω_1 должен быть делителем многочлена (51), таким образом, элементарные делители матрицы Ω_1 должны иметь следующий вид:

$$(\lambda - \lambda_{i_1})^{p_{i_1}},\ (\lambda - \lambda_{i_2})^{p_{i_2}} \ldots,\ (\lambda - \lambda_{i_\nu})^{p_{i_\nu}},$$

$$i_1, i_2, \ldots, i_\nu = 1, 2, \ldots, h,\ \ p_{i_1} \le a_{i_1}, p_{i_2} \le a_{i_2}, \ldots, p_{i_h} \le a_{i_h},\ \ p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_h} = n$$

(среди индексов $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ могут быть равные, n — заданный порядок искомой матрицы Ω_1).

Искомая матрица Ω_1 представляется в виде

$$\Omega_1 = T_1\{\lambda_{i_1}E^{(p_{i_1})} + H^{(p_{i_1})}, \ldots, \lambda_{i_\nu}E^{(p_{i_\nu})} + H^{(p_{i_\nu})}\}\ T_1^{-1},$$

где T_1 —- произвольная невырожденная матрица порядка n (здесь $\lambda_{i_\nu}E^{(p_{i_\nu})} + H^{(p_{i_\nu})}$ — жорданова клетка порядка p_{i_ν}, соответствующая собственному значению λ_{i_ν} [22]).

При решении матричного уравнения (49) решение Ω_1 ищется в виде $T_1J_1T_1^{-1}$, в котором матрица J_1 имеет известную форму. Матрица T_1 может быть найдена из решения однородной системы уравнений для ее коэффициентов

$$\Xi_0T_1J_1^m + \Xi_1T_1J_1^{m-1} + \ldots + \Xi_m\,T_1 = 0.$$

Для матричного уравнения (50) решение Ω_2 ищется в виде $T_2J_2T_2^{-1}$, причем матрица T_2^{-1} удовлетворяет однородному уравнению

$$J_2^mT_2^{-1}\Xi_0 + J_2^{m-1}T_2^{-1}\Xi_1 + \ldots + T_2^{-1}\Xi_m = 0.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 02-01-00818).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Поперечные** и обменные волны в сейсморазведке / Ред. Н.Н. Пузырев. М., Недра, 1967, 288 с.

2. **Нефедкина Т.В.** Выделение обменных отраженных *PS*-волн по системе ОГТ с несимметричными выборками // Геология и геофизика, 1980, № 3, с. 113—122.
3. **Нефедкина Т.В., Кондратьева Г.П., Олейник Л.В.** Цифровая обработка обменных отраженных волн // Геология и геофизика, 1980, № 4, с. 67—77.
4. **Пузырев Н.Н., Тригубов А.В., Бродов Л.Ю. и др.** Сейсмическая разведка методом поперечных и обменных волн. М., Недра, 1985, 277 с.
5. **Многоволновые** сейсмические исследования / Ред. Н.Н. Пузырев. М., Наука, 1987, 213 с.
6. **Пузырев Н.Н.** Зарождение и развитие многоволновой сейсморазведки в России. Возбуждение и регистрация волн // Геология и геофизика, 2003, т. 44, № 4, с. 277—285.
7. **Пузырев Н.Н.** Зарождение и развитие многоволновой сейсморазведки в России. Интерпретация данных и результаты // Геология и геофизика, 2003, т. 44, № 5, с. 465—473.
8. **Perez M.A., Grechka V., Michelena R.J.** Fracture detection in a carbonate reservoir using a variety of seismic methods // Geophysics, 1999, v. 64, № 4, p. 1266—1276.
9. **Lynn H.B., Beckham W.E., Simon K.M. et al.** *P*-wave and *S*-wave azimuthal anisotropy at a naturally fractured gas reservoir // Geophysics, 1999, v. 64, № 4, p. 1312—1328.
10. **Urosevic M., Juhlin Ch.** Seismic anisotropy in upper 500 m of the Southern Sydney Basin // Geophysics, 1999, v. 64, № 6, p. 1901—1911.
11. **Amudsen L., Ikella L.T., Berg L.E.** Multidimensional signature deconvolution and free-surface multiple elimination of marine multicomponent ocean-bottom seismic data // Geophysics, 2001, v. 66, № 5, p. 1594—1604.
12. **Grechka V., Tsvankin I.** $PP + PS = SS$ // EAGE 63th Conference and Exhibition. Amsterdam (The Netherlands, 11—15 June, 2001. Extended Abstract Book). European Association of Geoscientists and Engineers, p. 114
13. **Li X-Y., Dai H., Yuan J.** Converted-wave imaging in inhomogeneous anisotropic media // Ibid, p. 112.
14. Lou M, Pham D., Lee S. Anisotropic parameters estimation from *P*- and *PS*-converted wave data // EAGE 64-th Conference and Exhibition (Florence, Italy, 27—30 May, 2002. Extended Abstract Book). European Association of Geoscientists and Engineers, p. 138
15. **Дмитриев В.И.** Общий метод расчета электромагнитного поля в слоистой среде // Вычислительные методы и программирование, Вып. 10. М., Изд-во Моск. ун-та, 1968, с. 55—65.
16. **Аккуратов Г.В., Дмитриев В.И.** Метод расчета поля установившихся упругих колебаний в слоистой среде // Численные методы в геофизике. М., Изд-во Моск. ун-та, 1979, с. 3—12.
17. **Аккуратов Г.В., Дмитриев В.И.** Метод расчета поля установившихся упругих колебаний в слоистой среде // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1984, т. 24, № 2, с. 272—286.
18. **Фатьянов А.Г., Михайленко Б.Г.** Метод расчета нестационарных волновых полей в неупругих слоисто-неоднородных средах // Докл. АН СССР, 1988, т. 301, № 4, с. 834—839.
19. **Фатьянов А.Г.** Нестационарные сейсмические волновые поля в неоднородных анизотропнных средах с поглощением энергии. Новосибирск, 1989, 43 с. (Препр. / ВЦ СО АН СССР; № 857).
20. **Фатьянов А.Г.** Полуаналитический метод решения прямых динамических задач в слоистых средах // Докл. АН СССР, 1990, т. 310, № 2, с. 323—327.
21. **Алексеев А.С., Авдеев А.В., Фатьянов А.Г., Чеверда В.А.** Замкнутый цикл математического моделирования волновых процессов в вертикально-неоднородных средах (прямые и обратные задачи) // Математическое моделирование, 1991, т. 3, № 10, с. 80—94.
22. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. М., Наука, 1988, 548 с.

Рекомендована к печати 2 февраля 2004 г.
С.В. Гольдиным

Поступила в редакцию
24 ноября 2003 г.