*Геология и геофизика,* 2005, т. 46, № 4, с. 439—447

УДК 517.95 + 517.923

# ВЫЧИСЛЕНИЕ ГРАДИЕНТА ПРИ ОПТИМИЗАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ СЕЙСМИКИ ДЛЯ ГОРИЗОНТАЛЬНО-СЛОИСТОЙ СРЕДЫ

**Э. Курпинар, А.Л. Карчевский***

*Mathematics Department, Science Faculty, Ege University, 35100 Bornova, Izmir, Turkey*
** Институт математики СО РАН, 630090, Новосибирск, просп. Коптюга, 4, Россия*

Представлен алгоритм получения аналитических формул для градиента функционала невязки для численного решения обратной динамической задачи сейсмики в случае горизонтально-слоистой среды. Предложенный алгоритм может быть применим для решения коэффициентной обратной задачи для любых линейных дифференциальных уравнений и систем второго порядка, где коэффициенты являются кусочно-постоянными функциями. Логика алгоритма проста, формулы легки для программирования.

*Система упругости, обратная задача, градиент функционала невязки, горизонтально-слоистая среда, дифференциальное матричное уравнение Риккати.*

## OPTIMIZATION INVERSION OF SEISMIC DATA FROM LAYERED MEDIA: AN ALGORITHM FOR GRADIENT

**E. Kurpinar and A.L. Karchevsky**

A new analytical algorithm for residual functional gradient is applied to numerical inversion of seismic data from horizontally layered media. The algorithm works for any linear differential equation and second-order system where the coefficients are piecewise constant functions. It is advantageous due to its plain logic and easily programmable formalism.

*System of elasticity, inverse problem, residual functional gradient, layered medium, matrix Riccati differential equation*

## ВВЕДЕНИЕ

Методы подбора, основанные на методах минимизации функционалов невязки, широко используются в современной геофизике [1]. В огромном числе работ оптимизационные методы применялись для численного решения конкретных обратных задач [2—26]. Оптимизационные методы стали неотъемлемой частью некоторых пакетов программ, применяемых на практике, например, пакет программ двумерной кинематической интерпретации отраженных и головных волн (КИНГ) [27, 28].

Для минимизации функционала невязки часто используют градиентные методы, имеющие бóльшую скорость сходимости по сравнению с методами минимизации, которые используют только значения функционала. Вычисление градиента функционала невязки зачастую является весьма серьезной вычислительной задачей. Общим методом для получения вычислительных формул для градиента служит метод с постановкой сопряженной задачи (из российской литературы смотрите, например, [29], в зарубежной литературе необходимо отметить работы [10—12, 14]). Он является общим и подходит для любых постановок коэффициентных обратных задач. Выражения для градиента функционала невязки получаются в виде интегралов от решений прямой и сопряженной задач. Очевидно, если для выражений, стоящих под интегралами, не удается получить первообразных в аналитическом виде, данные выражения приходится интегрировать численно. Следовательно, при вычислении градиента на точность вычислений влияет ошибка метода численного интегрирования. На практике области интегрирования могут быть значительными, и, чтобы получить выражение градиента с приемлемой точностью, приходится использовать приемы и методы численного интегрирования, значительно увеличивающие время счета. Необходимо отметить, что точность вычисления градиента сильно влияет на правильность построения сопряженных направлений, если используется какой-либо метод сопряженных направлений, и в целом на скорость сходимости процесса минимизации [30]. Как правило, функционал невязки, с одной стороны, имеет овражный характер, а с другой стороны, в окрестности точки глобального минимума является „пологим“. Для функционалов с таким поведением точность вычисления градиента имеет принципиальное значение.

Если искомый коэффициент может быть представлен в виде известных функций и набора параметров, подлежащих определению, то для вычисления градиента могут быть использованы разностные схемы. Хорошо известно [31], что при вычислениях дифференциальных разностей результат получается с ошибкой, зависящей от нормы производных функции и шага. Как правило, на практике дополнительная информация для решения прямой задачи известна с некоторой ошибкой, что вносит дополнительную ошибку при вычислении градиента.

Пока в основе существующих и активно используемых в практике методов математического моделирования лежало одно дифференциальное уравнение второго порядка, например уравнение акустики, то с вычислением градиента функционала невязки особых проблем не возникало. Для уравнений акустики в случае горизонтально-слоистой среды возможно получение аналитических формул для градиента. Однако в последнее время в практической сейсморазведке появился интерес к анализу нескольких компонент смещений и способам обработки данных, которые направлены на выделение и интерпретацию обменных волн типа *PS*. Данные методы требуют развития более сложного аппарата математического моделирования, чем существующие. Уравнения акустики для учета влияния обменных волн оказываются неприемлемыми, и требуется использование уравнений, отвечающих теории упругости [32—38].

В данной работе представлен алгоритм получения аналитических формул для градиента функционала невязки численного решения обратной динамической задачи сейсмики в случае горизонтально-слоистой среды.

Данная работа является прямым следствием результатов работы [38], в которой был предложен метод численного решения системы упругости для горизонтально-слоистой анизотропной среды и дано решение дифференциального матричного уравнения Риккати (ДМУР) в виде, который оказался очень удобен для получения основного результата данной работы. Впервые идея метода получения аналитических формул для градиента функционала невязки в случае горизонтально-слоистой среды была предложена в работе [39], но, не имея пути нахождения решения ДМУР из [38], получить аналитические формулы для градиента функционала невязки коэффициентных обратных задач в более сложных дифференциальных уравнениях и системах второго порядка, чем было рассмотрено в [39], не предствлялось возможным.

## ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Алгоритм, представленный в работе, может быть применим для решения коэффициентной обратной задачи любых линейных дифференциальных уравнений и систем второго порядка, где коэффициенты являются кусочно-постоянными функциями. Предложенный метод основан на идее сведения уравнений второго порядка к уравнениям Риккати и послойном пересчете [32—38].

Для иллюстрации метода получения аналитических формул для градиента функционала невязки была выбрана система упругости с последействием. На данный выбор повлияли несколько причин. Во-первых, как уже отмечалось во „Введении“, современные требования моделирования и интерпретации данных в геофизике предполагают использование уравнений, отвечающих теории упругости. Во-вторых, общий метод получения выражений градиента функционала невязки для решения коэффициентной обратной задачи для системы упругости приводит к интегралам от решений прямой и сопряженной задачи, которые не имеют первообразных, вычисляемых аналитически. Решения прямой и сопряженных задач записываются через матричные экспоненты, это привносит дополнительные трудности при численном интегрировании. В-третьих, метод вычисления градиента функционала невязки, использующий разностные схемы, как и в любом другом случае, имеет ошибки вычисления, поскольку дополнительная информация о решении прямой задачи на практике, как правило, известна с ошибкой.

Пусть модель среды является горизонтально-слоистой с $N_l$ слоями и точками границ слоев $z_k$, $k = \overline{0, N_l}$, $z_0 = 0$, т. е. $j$-й слой есть интервал $[z_{j-1}, z_j]$, последний (подстилающий) $(N_l + 1)$-й слой — полупространство $[z_{N_l}, \infty)$.

Для учета последействия среды была выбрана модель Больцмана [40—42]. В этой модели постоянные Ламе в системе упругости заменяются интегральными операторами

$$\mathrm{M}u(t) = \mu u(t) - \mu' \int_0^t g_\mu(t-s)\, u(s)\, ds, \quad \Lambda u(t) = \lambda u(t) - \lambda' \int_0^t g_\lambda(t-s)\, u(s)\, ds,$$

где $\mu$ и $\lambda$ — постоянные Ламе, $\mu'$ и $\lambda'$ — параметры последействия среды, $g_\mu(t)$ и $g_\lambda(t)$ — функции последействия.

На практике часто используют следующее упрощение [41]:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\lambda'}{\lambda} = \theta, \quad g_\mu(t) = g_\lambda(t) \equiv \hat{g}(t).$$

С физической точки зрения это означает, что коэффициент Пуассона не заменяется интегральным оператором.

Каждый слой характеризуется плотностью $\rho$, продольной и поперечной скоростями $\upsilon_P = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ и $\upsilon_S = \sqrt{\mu/\rho}$, параметром последействия (неупругости) среды $\theta$, т. е. $\rho(z)$, $\upsilon_P(z)$, $\upsilon_S(z)$ и $\theta(z)$ являются кусочно-постоянными функциями переменной $z$, $z \in [0, \infty)$.

Источник вида

$$\pi\nabla\delta(x, y, z - z_*)\hat{f}(t) \tag{1}$$

возбуждает в среде неупругие колебания. Данный источник есть центр расширения и служит моделью взрыва. Точка $z_*$ удовлетворяет условию $z_* \in (z_0, z_1)$ и является координатой (глубиной) взрыва.

Применяя преобразование Фурье—Бесселя по пространственной переменной $r$ и преобразование Лапласа по временной переменной $t$ к системе упругости с последействием в целиндрической системе координат, мы получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(A\frac{\partial}{\partial z}U + \nu BU\right) - \nu B'\frac{\partial}{\partial z}U - DU = f(p)\,(\nu\delta(z - z_*)\,l_1 - \delta'(z - z_*)\,l_2), \tag{2}$$

$$U = \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix},\quad l_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad l_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A = \rho\begin{bmatrix} \hat{\upsilon}_S^2 & 0 \\ 0 & \hat{\upsilon}_P^2 \end{bmatrix},\quad B = \rho\begin{bmatrix} 0 & -\hat{\upsilon}_S^2 \\ \hat{\upsilon}_P^2 - 2\hat{\upsilon}_S^2 & 0 \end{bmatrix},\quad D = \rho\begin{bmatrix} p^2 + \nu^2\hat{\upsilon}_P^2 & 0 \\ 0 & p^2 + \nu^2\hat{\upsilon}_S^2 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\upsilon}_S^2 = \upsilon_S^2\hat{\theta},\qquad \hat{\upsilon}_P^2 = \upsilon_P^2\hat{\theta},\qquad \hat{\theta} = 1 - \theta g(p).$$

Здесь $f(p)$ и $g(p)$ — образы Лапласа функций $\hat{f}(t)$ и $\hat{g}(t)$, $\nu$ — параметр преобразования Фурье—Бесселя, $p = -\alpha + i\omega$ — параметр преобразования Лапласа, и индекс $'$ использован для транспонированных матриц.

Граничные условия имеют вид

$$\left(A\frac{\partial}{\partial z}U + \nu BU\right)\Big|_{z=0} = 0,\ \ U \to 0\ (z \to \infty). \tag{3}$$

В точках разрыва среды имеем условия склейки

$$\left[A\frac{\partial}{\partial z}U + \nu BU\right]_{z_k} = 0,\ \ [U]_{z_k} = 0,\ \ k = \overline{1, N_l}. \tag{4}$$

Здесь использовано обозначение $[q]_{z_k} = q(z_k + 0) - q(z_k - 0)$ для скачка функции $q$ в точке $z_k$.

Предположим, что известна следующая дополнительная информация для прямой задачи (2)—(4)

$$U(0, \nu, p) = U_0(\nu, p),\ \ U_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ w_0 \end{bmatrix},\ \ \nu \in I_\nu = \{\nu_\alpha | \alpha = \overline{1, N_\nu}\},\ \ p \in I_P = \{p_\beta | \beta = \overline{1, N_P}\}, \tag{5}$$

здесь $N_\nu$ и $N_P$ — конечные числа.

Параметры $p = -\alpha + i\omega$ и $\nu$ являются параметрами для прямой и обратной задач.

Обратная задача будет заключаться в определении неизвестных параметров среды $\rho_{[n]}$, $(\upsilon_P^2)_{[n]}$, $(\upsilon_S^2)_{[n]}$, $\theta_{[n]}$ $(n = \overline{2, N_l})$ при условии, что для решения прямой задачи (2)—(4) известна дополнительная информация (5).

Индекс в квадратных скобках означает, что значение кусочно-постоянной функции взято в $n$-м слое. Также этот индекс будет использоваться как общий индекс для комбинаций кусочно постоянных функций, например, $(\rho\upsilon_P^2)_{[n]}$.

Для численного решения обратной задачи (2)—(5) может быть использован метод минимизации функционала невязки следующего вида:

$$J[\upsilon_P, \upsilon_S, \rho, \theta] = \sum_{\alpha,\beta}\left(|u(0, \nu_\alpha, p_\beta) - u_0(\nu_\alpha, p_\beta)|^2 + |w(0, \nu_\alpha, p_\beta) - w_0(\nu_\alpha, p_\beta)|^2\right). \tag{6}$$

Предположим, что параметры первого и последнего слоя $\rho_{[1]}$, $(\upsilon_P^2)_{[1]}$, $(\upsilon_S^2)_{[1]}$, $\theta_{[1]}$, $\rho_{[N_l+1]}$, $(\upsilon_P^2)_{[N_l+1]}$, $(\upsilon_S^2)_{[N_l+1]}$, $\theta_{[N_l+1]}$ известны, также известны точки разрыва среды $z_k$ $(k = \overline{1, N_l})$ и функция последействия $g(t)$.

## ГРАДИЕНТ ФУНКЦИОНАЛА НЕВЯЗКИ

Пусть функции $\upsilon_P^2, \upsilon_S^2, \rho, \theta$ получат приращения $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ соответственно. В этом случае в решении прямой задачи (2)—(4) $U$ получит полное приращение $\delta U$.

Введем ступенчатую функцию

$$e_j = \begin{cases} 1, & z \in [z_{j-1}, z_j] \\ 0, & z \notin [z_{j-1}, z_j] \end{cases}$$

и следующие прямые задачи ($j = \overline{2, N_l}$, $l = \overline{1, 4}$, $k = \overline{1, N_l}$)

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(A \frac{\partial}{\partial z} V_l^j + \nu B V_l^j\right) - \nu B' \frac{\partial}{\partial z} V_l^j - D V_l^j = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{A}_l^j \frac{\partial}{\partial z} U + \nu \hat{B}_l^j U\right) + \nu (\hat{B}_l^j)^t \frac{\partial}{\partial z} U + \hat{D}_l^j U, \tag{7}$$

$$\left.\left(A \frac{\partial}{\partial z} V_l^j + \nu B V_l^j\right)\right|_{z=0} = -\left.\left(\hat{A}_l^j \frac{\partial}{\partial z} U + \nu \hat{B}_l^j U\right)\right|_{z=0}, \quad V_l^j \to 0 \ (z \to \infty), \tag{8}$$

$$\left[A \frac{\partial}{\partial z} V_l^j + \nu B V_l^j\right]_{z_k} = -\left[\hat{A}_l^j \frac{\partial}{\partial z} U + \nu \hat{B}_l^j U\right]_{z_k}, \quad [V_l^j]_{z_k} = 0. \tag{9}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\hat{A}_1^j = \rho\hat{\theta} e_j \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_1^j = \rho\hat{\theta} e_j \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{D}_1^j = \rho\hat{\theta}\nu^2 e_j \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{A}_2^j = \rho\hat{\theta} e_j \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_2^j = -\rho\hat{\theta} e_j \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{D}_2^j = \rho\hat{\theta}\nu^2 e_j \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{A}_3^j = e_j \begin{bmatrix} \hat{\upsilon}_S^2 & 0 \\ 0 & \hat{\upsilon}_P^2 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_3^j = e_j \begin{bmatrix} 0 & -\hat{\upsilon}_S^2 \\ \hat{\upsilon}_P^2 - 2\hat{\upsilon}_S^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{D}_3^j = e_j \begin{bmatrix} \hat{\upsilon}_P^2 r_P^2 & 0 \\ 0 & \hat{\upsilon}_S^2 r_S^2 \end{bmatrix},$$

$$\hat{A}_4^j = -e_j \begin{bmatrix} \upsilon_S^2 & 0 \\ 0 & \upsilon_P^2 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_4^j = -e_j \begin{bmatrix} 0 & -\upsilon_S^2 \\ \upsilon_P^2 - 2\upsilon_S^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{D}_4^j = -\rho\nu^2 e_j \begin{bmatrix} \upsilon_P^2 & 0 \\ 0 & \upsilon_S^2 \end{bmatrix},$$

$$r_P^2 = p^2/\hat{\upsilon}_P^2 + \nu^2, \quad r_S^2 = p^2/\hat{\upsilon}_S^2 + \nu^2, \quad \operatorname{Re} r_P > 0, \operatorname{Re} r_S > 0.$$

Нетрудно видеть, что следующие равенства имеют место

$$\delta_l = \sum_{j=2}^{N_l} \delta_l^j e_j, \quad l = \overline{1, 4},$$

и полное приращение $\delta U$ может быть представлено в виде

$$\delta U = \sum_{l=1}^{3} \sum_{j=2}^{N_l} V_l^j \delta_l^j + \sum_{j=2}^{N_l} V_4^j g(p)\, \delta_4^j + O\left(\sum_{l=1}^{4} \sum_{j=2}^{N_l} (\delta_l^j)^2\right). \tag{10}$$

Из равенства (10) следует, что главное значение приращения функционала невязки может быть представлено в следующей форме:

$$\Delta\Phi[\upsilon_P^2, \upsilon_S^2, \rho, \theta] = \sum_{l=1}^{3} \sum_{j=2}^{N_l} \left(2 \operatorname{Re} \sum_{\alpha,\beta} \langle N'_{\alpha,\beta}, V_{l_j} \rangle\right) \delta_l^j + \sum_{j=2}^{N_l} \left(2 \operatorname{Re} \sum_{\alpha,\beta} g(p_\beta) \langle N'_{\alpha,\beta}, V_4^j \rangle\right) \delta_4^j.$$

Здесь $N_{\alpha,\beta} = \overline{U(0, \nu_\alpha, p_\beta)} - \overline{U_0(\nu_\alpha, p_\beta)}$, где черта обозначает комплексное сопряжение, и $\langle .,. \rangle$ есть скалярное произведение.

После этого мы немедленно получаем выражение для градиента функционала

$$\Phi'[\upsilon_P^2, \upsilon_S^2, \rho, \theta] = (\Phi_1^2, ..., \Phi_1^{N_l}, \Phi_2^2, ..., \Phi_2^{N_l}, \Phi_3^2, ..., \Phi_3^{N_l}, \Phi_4^2, ..., \Phi_4^{N_l}), \tag{11}$$

$$\Phi_l^j = \operatorname{Re} \sum_{\alpha,\beta} \langle N'_{\alpha,\beta}, V_l^j \rangle, \quad \Phi_4^j = \operatorname{Re} \sum_{\alpha,\beta} g(p_\beta) \langle N'_{\alpha,\beta}, V_4^j \rangle, \quad l = \overline{1, 3}, \ j = \overline{2, N_l}.$$

Решение прямой задачи (2)—(4) $U(0, \nu, p)$ может быть найдено с помощью метода из [38], но для того чтобы пользоваться формулой (11), нам необходимо уметь находить решения $V_l^j(0, \nu, p)$ ($l = \overline{1, 4}, j = \overline{2, N_l}$)

прямых задач (7)—(9). Если искать вектор-функцию $V_l^j$ непосредственно из условий (7)—(9), то в выражении для $V_l^j$ будут присутствовать интегралы по переменной $z$ от вектор-функции $U(z, \nu, p)$, ее производных и общего решения однородной системы (7). Значения данных интегралов придется искать численно. Постараемся обойти данное затруднение.

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ $V_l^j$

Предположим, что ищется компонента $\Phi_l^j$ градиента (11) ($j = \overline{2, N_l}$, $l = \overline{1, 4}$).

Введем вектор-функцию

$$W_l^j = \begin{bmatrix} U \\ V_l^j \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Используя соотношения (2)—(4) и (7)—(9), получим постановку прямой задачи для вектор-функции $W_l^j$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(A_l^j \frac{\partial}{\partial z} W_l^j + \nu B_l^j W_l^j\right) - \nu C_l^j \frac{\partial}{\partial z} W_l^j - D_l^j W_l^j = f(p)\, \rho l_0, \tag{13}$$

$$\left(A_l^j \frac{\partial}{\partial z} W_l^j + \nu B_l^j W_l^j\right)\Bigg|_{z=0} = 0, \;\; W_l^j \to 0 \;(z \to \infty), \tag{14}$$

$$\left[A_l^j \frac{\partial}{\partial z} W_l^j + \nu B_l^j W_l^j\right]_{z_k} = 0, \;\; [W_l^j]_{z_k} = 0, \;\; k = \overline{1, n}. \tag{15}$$

Здесь введены обозначения для квадратных матриц четвертого порядка

$$A_l^j = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \hat{A}_l^j & A \end{bmatrix}, \;\; B_l^j = \begin{bmatrix} B & 0 \\ \hat{B}_l^j & B \end{bmatrix}, \;\; C_l^j = \begin{bmatrix} B' & 0 \\ (\hat{B}_l^j)' & B' \end{bmatrix}, \;\; D_l^j = \begin{bmatrix} D & 0 \\ \hat{D}_l^j & D \end{bmatrix}.$$

Матрицы $A_l^j$, $B_l^j$, $C_l^j$, $D_l^j$ являются постоянными в каждом слое $[z_{k-1}, z_k]$ ($k = \overline{1, N_l}$).

К прямой задаче (13)—(15) может быть применим метод решения из работы [38], поэтому мы ограничимся здесь только указанием основных этапов построения решения прямой задачи и приведением готовых выражений. За объяснениями всех действий отсылаем читателя к вышеназванной работе.

Решение прямой задачи (13)—(15) $W_l^j$ может быть представлено в виде

$$W_l^j = \Omega_{l1}^j + \Omega_{l2}^j, \;\; \Omega_{l2} = \begin{cases} \Omega_{l3}^j, & z \in [z_*, \infty), \\ \Omega_{l4}^j, & z \in [0, z_*], \end{cases} \tag{16}$$

где вектор-функция $\Omega_{l1}^j$ есть непрерывная часть, а вектор-функция $\Omega_{l2}^j$ — разрывная часть решения.

Вектор-функции $\Omega_{lm}^j$ по определению должны удовлетворять следующим условиям:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(A_l^j \frac{\partial}{\partial z} \Omega_{lm}^j + \nu B_l^j \Omega_{lm}^j\right) - \nu C_l^j \frac{\partial}{\partial z} \Omega_{lm}^j - D_l^j \Omega_{lm}^j = 0, \;\; m = 1, 3, 4, \tag{17}$$

$$\left[A_l^j \frac{\partial}{\partial z} \Omega_{lm}^j + \nu B_l^j \Omega_{lm}^j\right]_{z_k} = 0, \;\; [\Omega_{lm}^j]_{z_k} = 0, \;\; m = 1, 3, \;\; k = \overline{1, N_l}, \tag{18}$$

$$\Omega_{lm}^j \to 0 \;(z \to \infty), \;\; m = 1, 3. \tag{19}$$

В точке $z_*$ имеют место равенства:

$$\Omega_{l3}^j\big|_{z_*+0} - \Omega_{l4}^j\big|_{z_*-0} = -f(p)\, (\hat{\upsilon}_P^2)_{[1]} l_1,$$

$$\left(A_l^j \frac{\partial}{\partial z} \Omega_{l3}^j + \nu B_l^j \Omega_{l3}^j\right)\Bigg|_{z_*+0} - \left(A_l^j \frac{\partial}{\partial z} \Omega_{l4}^j + \nu B_l^j \Omega_{l4}^j\right)\Bigg|_{z_*-0} = 2 f(p)\, \nu(\rho \hat{\upsilon}_S^2 \hat{\upsilon}_P^{-2})_{[1]} l_2. \tag{20}$$

Вводятся квадратные матрицы $S_l^j$, $X_l^j$ и $Y_l^j$ четвертого порядка с помощью соотношений

$$A_l^j \frac{\partial}{\partial z} \Omega_{l1}^j + \nu B_l^j \Omega_{l1}^j = S_l^j \Omega_1^l, \;\; z \in [0, \infty),$$

$$A_l^j \frac{\partial}{\partial z} \Omega_{l3}^j + \nu B_l^j \Omega_{l3}^j = X_l^j \Omega_3^l, \;\; z \in [z_*, \infty), \tag{21}$$

$$A_l^j \frac{\partial}{\partial z} \Omega_{l4}^j + \nu B_l^j \Omega_{l4}^j = Y_l^j \Omega_4^l, \;\; z \in [0, z_*],$$

которые удовлетворяют следующим ДМУР:

$$\frac{d}{dz} S_l^j + (S_l^j - \nu C_l^j)\,(A_l^j)^{-1}(S_l^j - \nu B_l^j) = D_l^j,\ z \in [0, \infty),$$

$$\frac{d}{dz} X_l^j + (X_l^j - \nu C_l^j)\,(A_l^j)^{-1}(X_l^j - \nu B_l^j) = D_l^j,\ z \in [z_*, \infty), \tag{22}$$

$$\frac{d}{dz} Y_l^j + (Y_l^j - \nu C_l^j)\,(A_l^j)^{-1}(Y_l^j - \nu B_l^j) = D_l^j,\ z \in [0, z_*].$$

Из условий (18) и определений (21) следует, что в точках $z_k$ ($k = \overline{1, N_l}$) имеют место условия склейки

$$[S_l^j]_{z_k} = 0,\ [X_l^j]_{z_k} = 0. \tag{23}$$

Для решения $W_l^j$ прямой задачи (13)—(15) из первого граничного условия (14), из соотношений (21), (22) имеет место следующее равенство:

$$W_l^j|_{z=0} = (E - (S_l^j|_{z=0})^{-1} Y_l^j|_{z=0})\, K\, (X_l^j|_{z=z_*} - Y_l^j|_{z=z_*})^{-1}(X_l^j|_{z=z_*} l_2 + 2(\rho\upsilon_S^2)_{[1]}\nu l_1), \tag{24}$$

$$K = \exp\left\{-\int_0^{z_*} (A_l^j)^{-1}(Y_l^j - \nu B_l^j)\, ds\right\}.$$

Таким образом, для того чтобы получить значения вектора $W_l^j|_{z=0}$, а значит и вектора $V_l^j|_{z=0}$, нам необходимо найти матрицы $S_l^j|_{z=0}$, $X_l^j|_{z=z_*}$ и $Y_l^j(z)$ ($z \in [0, z_*]$), т. е. нам необходимо решение уравнений (22).

Согласно работе [38], решение второго уравнения (22) в полупространстве $[z_{N_l}, \infty)$ может быть найдено в следующем виде:

$$X_l^j = (\rho\hat{\upsilon}_S^2)_{N_l+1}\begin{bmatrix} Q_{(-)}^{N_l+1} & 0 \\ 0 & Q_{(-)}^{N_l+1}\end{bmatrix},\ Q_{(-)}^j = \begin{bmatrix} -(r_P\, q_S)_{[j]} & \nu((q_S)_{[j]} - 2) \\ \nu((q_S)_{[j]} - 2) & -(r_S\, q_S)_{[j]}\end{bmatrix},\ q_S = \frac{r_S^2 - \nu^2}{r_P\, r_S - \nu^2}. \tag{25}$$

Второе условие склейки (23) и решение ДМУР (22) в каждом слое, переходя от слоя к слою, позволяет получить матрицу $X_l^j|_{z=z_*+0}$.

Положим $S_l^j|_{z=z_{N_l}+0} = X_l^j|_{z=z_{N_l}+0}$. Откуда немедленным следствием будет равенство $S_l^j(z) = X_l^j(z)$ для $z \in [z_*, \infty)$. Процедура послойного пересчета для матрицы $S_l^j$ будет закончена в точке $z = 0$, т. е. знаем матрицу $S_l^j|_{z=0}$.

Для матрицы $Y_l^j$ можно требовать выполнения в точке $z_*$ равенств

$$Y_l^j|_{z=z_*} = (\rho\hat{\upsilon}_S^2)_{[1]}\begin{bmatrix} Q_{(+)}^1 & 0 \\ 0 & Q_{(+)}^1\end{bmatrix},\qquad Q_{(+)}^j = \begin{bmatrix} (r_P\, q_S)_{[j]} & \nu((q_S)_{[j]} - 2) \\ \nu((q_S)_{[j]} - 2) & (r_S\, q_S)_{[j]}\end{bmatrix}. \tag{26}$$

Из свойств ДМУР (22) следует, что матрица $Y_l^j$ будет постоянной на всем интервале $[0, z_*]$. Это позволяет получить матрицу $K$ в виде

$$K = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q\end{bmatrix},\ Q = \begin{bmatrix} \alpha_S + \nu\gamma\alpha_{SP} & r_S\,\gamma\alpha_{SP} \\ -r_P\,\gamma\alpha_{SP} & \alpha_P - \nu\gamma\alpha_{SP}\end{bmatrix},$$

$$\alpha_S = \exp\{-(r_S)_{[1]} z_*\},\ \alpha_P = \exp\{-(r_P)_{[1]} z_*\},\ \alpha_{SP} = \alpha_S - \alpha_P,\ \gamma = \frac{\nu}{(r_P\, r_S)_{[1]} - \nu^2}.$$

Согласно результатам работы [38], решение ДМУР для каждого слоя $[z_{k-1}, z_k]$ ($k = \overline{1, N_l}$) может быть получено в виде:

$$X_l^j(z) = X_l^{jk} + T_{l2}^{jk}\,(H_l^{jk}(z))^{-1}(T_{l1}^{jk})^{-1}, \tag{27}$$

$$H_l^{jk}(z) = \Xi_l^{jk}(z)\, G_l^{jk}\, (\Xi_l^{jk}(z))' + \Xi_l^{jk}(z)\left(\int_{z_k}^{z} (\Xi_l^{jk}(s))^{-1} F_l^{jk}\, ((\Xi_l^{jk}(s))^{-1})' ds\right)(\Xi_l^{jk}(z))', \tag{28}$$

$$\Xi_l^{jk}(z) = \exp\{J_l^{jk}(z - z_k)\},$$

$$G_l^{jk} = (T_{l1}^{jk})^{-1}(X_{lk}^j - X_l^{jk})^{-1} T_{l2}^{jk},$$

$$F_l^{jk} = (T_{l1}^{jk})^{-1}(A_l^j)^{-1}T_{l2}^{jk},$$

$$X_l^{jk} = (\rho\hat{\upsilon}_S^2)^k \begin{bmatrix} Q_{(+)}^k & 0 \\ 0 & Q_{(+)}^k \end{bmatrix},$$

$$X_{lk}^j = X_l^j|_{z = z_k - 0}.$$

Матрицы $T_{l1}^{jk}$ и $T_{l2}^{jk}$ являются решениями матричных уравнений:

$$A_l^j\, T_{l1}^{jk}\, (J_l^{jk})^2 + \nu(B_l^j - C_l^j)\; T_{l1}^{jk}\, J_l^{jk} - D_l^j\, T_{l1}^{jk} = 0,$$

$$((J_l^{jk})')^2(T_{l2}^{jk})^{-1}A_l^j + (J_l^{jk})\; (T_{l2}^{jk})^{-1}(B_l^j - C_l^j) - (T_{l2}^{jk})^{-1}D_l^j = 0.$$

Матрица $J_l^{jk}$ строится следующим образом: для $k \neq j$ имеем

$$J_l^{jk} = \begin{bmatrix} (r_S)_{[k]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (r_S)_{[k]} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (r_P)_{[k]} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (r_P)_{[k]} \end{bmatrix}, \; l = \overline{1, 4},$$

для $k = j$ имеем

$$J_1^{kk} = \begin{bmatrix} (r_S)_{[k]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (r_S)_{[k]} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (r_P)_{[k]} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & (r_P)_{[k]} \end{bmatrix}, \; J_2^{kk} = \begin{bmatrix} (r_S)_{[k]} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & r_{S[k]} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (r_P)_{[k]} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (r_P)_{[k]} \end{bmatrix},$$

$$J_3^{kk} = \begin{bmatrix} (r_S)_{[k]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (r_S)_{[k]} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (r_P)_{[k]} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (r_P)_{[k]} \end{bmatrix}, \; J_4^{kk} = \begin{bmatrix} (r_S)_{[k]} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (r_S)_{[k]} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (r_P)_{[k]} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & (r_P)_{[k]} \end{bmatrix}.$$

Если положим $z = z_{k-1}$ в [27], то получим формулы для послойного пересчета.

В выражении (28) интеграл может быть легко представлен на бумаге, и окончательный вид аналитических формул может быть легко получен. Данное выражение приведено здесь в таком виде из соображений краткости.

## АЛГОРИТМ ДЕЙСТВИЙ

Для вычисления компоненты $\Phi_l^j$ ($j = \overline{2, N_l}$, $l = \overline{1, 4}$) функционала невязки (6) необходимо осуществить следующие действия:

— выберем значение матрицы $X_l^j$ по формуле (25);

— используя условия склейки (23) и решение ДМУР (27), вычислим значение $X_{l2}^j$;

— полагая $z = z_*$ в (27) и используя $X_{l2}^j$ как начальное условие для решения ДМУР при $k = 1$, получим матрицу $X_l^j|_{z = z_*}$;

— полагая $z = 0$ в (27) и используя $X_{l2}^j$ как начальное условие для решения ДМУР при $k = 1$, получим матрицу $S_l^j|_{z = 0}$;

— используя вычисленные матрицы $X_l^j|_{z = z_*}$, $S_l^j|_{z = 0}$ и матрицу $Y_l^j$, данную соотношением (26), получим значение вектор-функции $W_l^j$ (см. (24)) и, следовательно, имеем значения вектор-функций $U$ и $V_l^j$ (см. (12));

— вычисляем компоненту $\Phi_l^j$ градиента функционала, используя выражение (11).

Указанный путь удобен тем, что мы получаем решение прямой задачи (2)—(4) и градиент функционала невязки (11) одновременно.

## ВЫВОДЫ

В работе представлен алгоритм получения аналитических формул для градиента функционала невязки при численном решении коэффициентной обратной задачи для системы упругости с последействием в случае горизонтально-слоистой среды.

Данный алгоритм может быть применим при решении коэффициентной обратной задачи для любых дифференциальных линейных уравнений и систем второго порядка, где коэффициенты являются кусочно-постоянными функциями.

Как видно из вышеизложенного, все формулы имеют аналитический вид и могут быть легко запрограммированы.

В формулах присутствуют экспоненты, у которых показатели имеют отрицательную действительную часть, и, следовательно, ошибка округления не будет накапливаться в процессе послойного пересчета.

Логика алгоритма проста, формулы легки для программирования. Алгоритм может быть легко распараллелен, поскольку вычисление компоненты $\Phi_l^j$ градиента функционала невязки для любых $j$ и $l$ происходит независимо.

Случай упругой среды легко получается, если положить $\theta = 0$.

Работа поддержана TÜBİTAK-NATO-PC B Program и грантом РФФИ (№ 02-01-00809).

### ЛИТЕРАТУРА


1. **Вычислительные математика** и техника в разведочной геофизике: Справочник геофизика / Ред. В.И. Дмитриев. М., Недра, 1990, 222 с.
2. **Marquardt P.W.** An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters // J. SIAM, 1963, v. 11, p. 413—441.
3. **Алексеев А.С.** Обратные динамические задачи сейсмики // Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных. М., Наука, 1967, с. 9—84.
4. **Chen W.N., Seifeld J.H.** Estimation of spatially varying partial differential equations // INT J. Conrol, 1971, v. 15, № 3, p. 487—495.
5. **Алексеев А.С., Добринский В.И., Непрочнов Ю.П., Семенов Г.А.** К вопросу о практическом использовании теории обратных динамических задач сейсмики // Докл. АН СССР, 1976, т. 228, № 5, с. 1053—1056.
6. **Bamberger A., Chavent G., Lailly P.** Une application de la theorie du contrôle a un probleme inverse de sismique // Ann. Geophys., 1977, v. 33, № 1/2, p. 183—200.
7. **Bamberger A., Chavent G., Hemon Ch., Lailly P.** Inversion of normal incidence seismograms // Geophysics, 1982, v. 47, p. 757—770.
8. **Tarantola A., Valette B.** Generalized nonlinear inverse problems solved using the least squares criterion // Rev. Geophys. Space Phys., 1982, v. 20, № 2, p. 219—232.
9. **Cook D.A., Schneider W.A.** Generalized linear inversion of reflection seismic data // Geophysics, 1983, v. 48, № 6, p. 665—676.
10. **Tarantola A., Nercessian A.** Three-dimensional inversion without blocks // Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1984, v. 76, p. 299—306.
11. **Tarantola A.** Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation // Geophysics, 1984, v. 49, № 8, p. 1259—1266.
12. **Tarantola A.** Strategy for nonlinear elastic inversion of seismic reflection data // Geophysics,1986, v. 51, № 10, p. 1893—1903.
13. **Ursin B., Berteussen K.-A.** Comparison of some inverse methods for wave propagation in layered media // Proc. IEEI, 1986, v. 74, p. 7—19.
14. **Tarantola A.** Theoretical background for the inversion of seismic waveforms, including elasticity and attenuation // PAGEOPH (Pure and Applied Geophysics), 1988, v. 128, № 1/2, p. 365—399.
15. **Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.** Экстремальные методы решения некорректных задач. М., Наука, 1988, 286 с.
16. **Santosa F., Symes W.W.** An analysis of least-squares velocity inversion. Geophys. Monogr. Ser., № 4: Society of exploration geophysicists, 1989, 256 p.
17. **Cao D., Boydoun W.B., Singh S.C., Tarantola A.** A simultaneous inversion for background velocity and impedance maps // Geophysics, 1990, v. 55, № 4, p. 458—469.
18. **Алексеев А.С., Авдеев А.В., Фатьянов А.Г., Чеверда В.А.** Замкнутый цикл математического моделирования волновых процессов в вертикально-неоднородных средах (прямые и обратные задачи) // Математическое моделирование, 1991, т. 3, № 10, с. 80—94.
19. **Symes W.W.** A Differential semblance algorithm for the inverse problem of reflection seismology // Computers Math. Applic., 1991, v. 22, № 4/5, p. 147—178.
20. **Iskakov K.T., Kabanikhin S.I.** The solution of one-dimensional inverse problem of geoelectrics by the method of conjugate gradients // Rus. J. Theoret. Appl. Mech., 1991, № 3, p. 78—88.
21. **Kabanikhin S.I., Karchevsky A.L.** Optimization method of solving inverse problems of geoelectrics // Ill-posed problem in natural sciences / A. Tikhonov (ed.). VSP/TSP, 1992, p. 312—325.

22. **Hildebrand S.I., McMechan G.A.** 1-D seismic inversion of dual wavefield data: Part I, Nonuniqueness and stability // Geophysics, 1994, v. 59, № 5, p. 782—788.
23. **Hildebrand S.I., McMechan G.A.** 1-D seismic inversion of dual wavefield data: Part II, A Gulf of Mexico example // Geophysics, 1994, v. 59, № 5, p. 789—800.
24. **Karchevsky A.L.** Numerical solution of the inverse problem for the system of elasticity for vertically inhomogeneous medium // Bull. Novosibirsk Computing Center, ser. Mathematical Modeling in Geophysics, 1999, issue 5, p. 63—69.
25. **Карчевский А.Л.** Численное решение одномерной обратной задачи для системы упругости // Докл. РАН, 2000, т. 375, № 2, с. 235—238.
26. **Карчевский А.Л., Фатьянов А.Г.** Численное решение обратной задачи для системы упругости с последействием для вертикально-неоднородной среды // СибЖВМ, 2001, т. 4, № 3, с. 259—269.
27. **Судварг Д.И., Киселева А.Г., Черняк В.С. и др.** Система кинематической интерпретации волн (КИНГ). Новосибирск, ИГиГ СО АН СССР, 1987, 136 с.
28. **Гольдин С.В., Киселева А.Г., Пашков В.Г., Черняк В.С.** Двумерная кинематическая интерпретация сейсмограмм в слоистых средах. Новосибирск, Наука, 1993, 208 с.
29. **Васильев Ф.П.** Методы решения экстремальных задач. М., Наука, 1981, 400 с.
30. **Васильев Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач. М., Наука, 1988, 550 с.
31. **Самарский А.А.** Теория разностных схем. М., Наука, 1977, 656 с.
32. **Дмитриев В.И.** Общий метод расчета электромагнитного поля в слоистой среде // Вычислительные методы и программирование, Вып. 10. М., Изд-во Моск. ун-та, 1968, с. 55—65.
33. **Аккуратов Г.В., Дмитриев В.И.** Метод расчета поля установившихся упругих колебаний в слоистой среде // Численные методы в геофизике. М., Изд-во Моск. ун-та, 1979, с. 3—12.
34. **Аккуратов Г.В., Дмитриев В.И.** Метод расчета поля установившихся упругих колебаний в слоистой среде // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1984, т. 24, № 2, с. 272—286.
35. **Фатьянов А.Г., Михайленко Б.Г.** Метод расчета нестационарных волновых полей в неупругих слоисто-неоднородных средах // Докл. АН СССР, 1988, т. 301, № 4, с. 834—839.
36. **Фатьянов А.Г.** Нестационарные сейсмические волновые поля в неоднородных анизотропнных средах с поглощением энергии. Новосибирск, 1989, 43 с. (Препринт / ВЦ СО АН СССР, № 857).
37. **Фатьянов А.Г.** Полуаналитический метод решения прямых динамических задач в слоистых средах // Докл. АН СССР, 1990, т. 310, № 2, с. 323—327.
38. **Карчевский А.Л.** Метод численного решения системы упругости для горизонтально-слоистой анизотропной среды // Геология и геофизика, 2005, т. 46, № 3, с. 339—351.
39. **Karchevsky A.L.** Several remarks on numerical solution of the one-dimensional coefficient inverse problem // J. Inverse and Ill-Posed Problems, 2002, v. 10, № 4, p. 361—384.
40. **Boltzmann L.** Zur Theorie der elastischen Nachwirkung // An. Phys. Chem., 1876, Erg-Bd. 7.
41. **Шемякин Е.И.** Динамические задачи теории упругости и пластичности. Новосибирск, Изд-во НГУ, 1968, 350 с.
42. **Колтунов М.А.** Ползучесть и релаксация. М., Высшая школа, 1976, 277 с.

*Рекомендована к печати 2 февраля 2004 г.*
*С.В. Гольдиным*

*Поступила в редакцию*
*24 ноября 2003 г.*