

А. С. Сеннов

## О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ЗОНУ АЭРАЦИИ

**Постановка вопроса.** Математический аппарат для описания гидродинамических процессов в зоне аэрации традиционно разрабатывался специалистами в области почвоведения. Тем не менее некоторые специфические вопросы охраны подземных вод от загрязнения обуславливают особенности такого моделирования. Они связаны прежде всего со значительной мощностью и, как правило, неоднородным составом грунтов в зоне частичного водонасыщения, необходимостью моделирования физических свойств жидкости, в общем случае отличных от свойств природной воды зоны аэрации, которые могут меняться в процессе вертикальной фильтрации, с моделированием несмешивающихся жидкостей, например водонефтяной смеси.

В данной работе рассматривается распространение загрязнителей, которые легко растворяются в воде, изменяя ее физические свойства. К ним относятся некоторые виды ракетного топлива (несимметричный диметил-гидразин) [1] и различные жидкости, понижающие температуру замерзания растворов, в частности этиленгликоль (ЭГ).

**Математическая модель.** Основное уравнение влагопереноса записывают следующим образом [2]:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial H}{\partial z} \right) - \frac{\partial K}{\partial z} = S \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (1)$$

где  $H$  – давление всасывания;  $z$  – вертикальная координата;  $K$  – коэффициент влагопереноса;  $S$  – удельная емкость, первая производная влажности по давлению всасывания. Параметры  $K$  и  $S$  нелинейно зависят от влажности.

Для описания зависимостей  $K$  и  $S$  от влажности используют более 30 уравнений [2, 3]. Далее применяются достаточно простые зависимости, описывающие экспериментальные данные:

$$K_v = \frac{K_0}{A_K H^3 + 1}, \quad W = \frac{W_0}{A_W H^3 + 1}. \quad (2)$$

Здесь  $K_0$  – влагопроводность при полном насыщении, т. е. коэффициент фильтрации,  $W_0$  – влажность при полном насыщении,  $A_K$  и  $A_W$  – константы для конкретного грунта.

При моделировании движения вязкой жидкости необходимо перерасчитывать данные константы  $A_K$  и  $A_W$ , для того чтобы учесть изменения вязкости и поверхностного натяжения раствора. Высота капиллярного поднятия  $h_k$  линейно зависит от коэффициента поверхностного натяжения и плотности жидкости:

$$h_k = \frac{2\sigma}{g\rho r}.$$

Здесь  $r$  – радиус капилляра,  $g$  – ускорение свободного падения. Таким образом, при известной высоте капиллярного поднятия чистой воды в грунте при нормальных условиях  $h$  высота капиллярного поднятия исследуемого раствора может быть вычислена с помощью уравнения

$$h' = h_k \frac{\sigma' \rho}{\sigma \rho'}, \quad (3)$$

в котором  $\sigma$ ,  $\rho$  – поверхностное натяжение и плотность воды при нормальных условиях,  $\sigma'$ ,  $\rho'$  – поверхностное натяжение и плотность исследуемого раствора.

Для того чтобы скорректировать зависимость влажности от давления всасывания в уравнении (2) с учетом вязкости и плотности раствора, необходимо перерасчитать константу  $A_W$ . Для этого используем уравнение

$$A' = A_0 \left( \frac{\delta' \rho}{\sigma \rho'} \right)^3.$$

Для того чтобы учесть изменения влагопроводности вследствие изменения вязкости, применим известный коэффициент проницаемости

$$K_p = \frac{K_0 \nu}{g},$$

где  $\nu$  – динамическая вязкость.

**Сравнение модели с физическим экспериментом.** Описанный выше алгоритм использован для сравнения результатов вычислений с экспериментальными данными [4]. В этих экспериментах песок укладывался в дюралюминиевые трубы диаметром 2,5 и 5 см и затем снизу подавалась вода под давлением. После появления воды на

поверхности ее подача прекращалась, и через некоторое время труба разбиралась для послойного определения влажности.

Вычисления показали, что точнее всего экспериментальные данные описываются с помощью чисто неявной процедуры на основе метода Гаусса–Сейдела. Пересчет коэффициентов уравнения (1) осуществлялся внутри каждого итерационного цикла. Сравнение данных физического и вычислительного экспериментов приведены на рис. 1. В уравнениях (2) использовалась четвертая степень, так как это было выяснено с помощью предварительных оптимизационных вычислений.

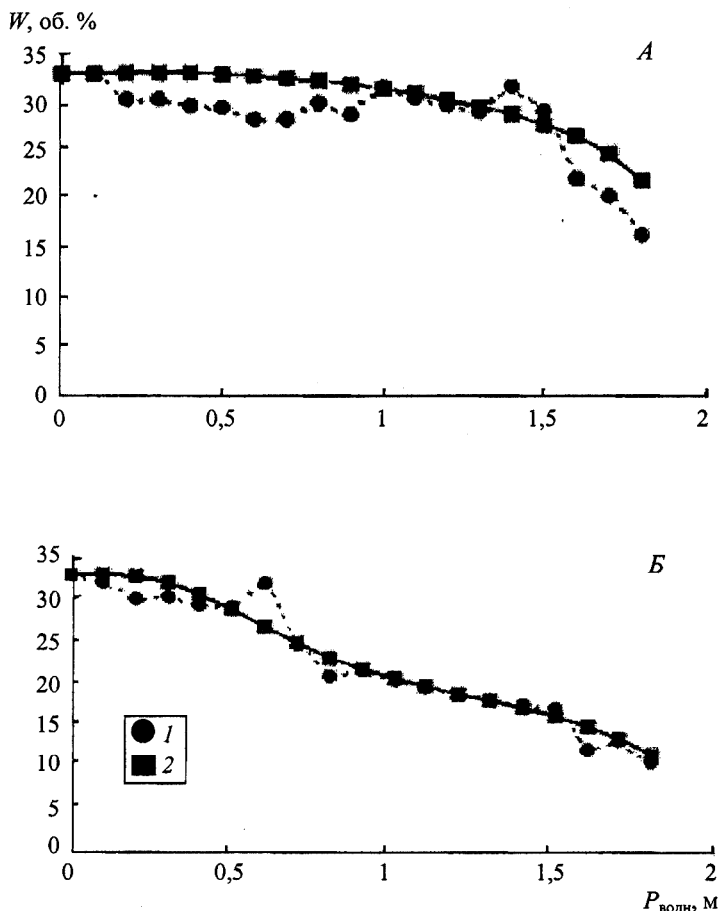


Рис. 1. Распределение влажности через 20 мин (А) и через час (Б).

**Методика эксперимента.** Для оценки параметров характеристической кривой раствора антифриза был проделан эксперимент, подобный вышеописанному. В качестве антифриза применен ЭГ. Плотность раствора определялась ареометрически, для определения остальных свойств раствора применялись литературные данные [5].

В эксперименте использовалась разборная труба диаметром 3,5 см и длиной 60 см. Она заполнялась ордовикским песком, взятым в Саблино (Ленинградская обл.), таким же, который исследовался в предыдущих экспериментах [4]. Приведем фракционный состав песка:

Диаметр, $\times 10^{-3}$ , м	1–0,5	0,5–0,25	0,25–0,10	0,10–0,05	0,05–0,01	< 0,01
Содержание, %	0,46	27,45	30,35	40,73	0,5	0,5

Эксперимент продолжался 4 дня до полной стабилизации системы. Сравнение результатов эксперимента и вычислений приведены в таблице и на рис. 2. В таблице приведены объемные проценты ЭГ от пористости. Средняя пористость насыпного песка составила 41%, удельный вес – 2,64. Некоторые отличия в положении кривых возможно, объясняются повышенной пористостью.

### Результаты эксперимента и вычислений

ЭГ, об. %	$H_{\text{эксп}}, \text{М}$	$H_{\text{выг}}, \text{М}$
9,31	0,563	0,528
11,96	0,488	0,486
17,75	0,413	0,403
20,85	0,338	0,347
22,32	0,263	0,333
36,15	0,188	0,264
93,26	0,113	0,079
96,58	0,038	0,032

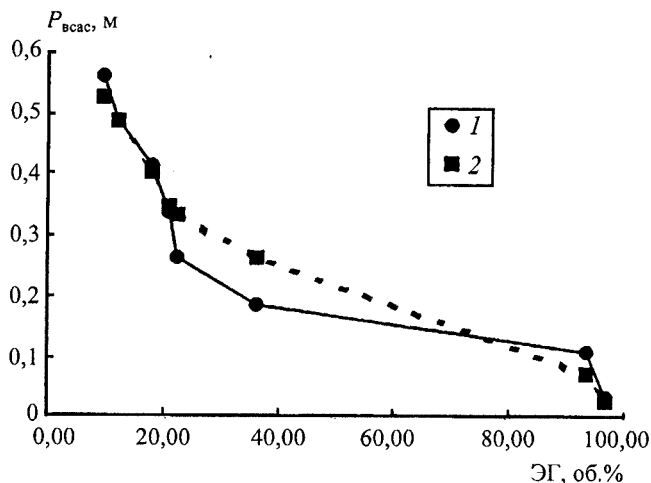


Рис. 2. Характеристические кривые для системы ЭГ–песок.

**Заключение.** Настоящее исследование посвящено изучению движения вязкой жидкости в зоне аэрации. По нашему мнению, следует продолжить данную работу, например необходимо установить зависимости коэффициента влагопроводности как от содержания загрязняющего компонента в воде, так и от температуры раствора. Однако полученные результаты позволяют проводить некоторые оценочные вычисления, в частности при известных значениях утечек и характеристик водного баланса территории.

### Summary

*Senov A. S.* Viscous liquid movement through unsaturated zone – some aspects of mathematical modeling.

The movement of viscous liquid is shown on the example of the antifreezing compound on the base of ethylene glycol ( $\text{C}_2\text{H}_6\text{O}_2$ ) GlycoShell, Oslo trade-mark. While constructing the characteristic curve  $H = f(q)$  it is assumed that soil-moisture curve is known. The tension head of ethylene glycol experimental results are given.

### Литература

1. Озябкин В. Н., Сеннов А. С. Конечно-разностный имитатор движения вязкой жидкости через зону аэрации // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 7: Геология, география. 1996. Вып. 1 (№ 7).
2. Глобус А. М. Основы гидрофизики почв. Л., 1987.
3. Senov A. S. Viscous liquid movement trough unsaturated zone – Some aspects of mathematical modeling // Abstract of report on Intern. symposium "Deicing and Dustbinding – Risk to aquifers". Helsinki, 1998.
4. Проскурников С. М. Экспериментальные данные о капиллярном движении воды в песках // Труды Ленингр. гидролог. ин-та, 1948. Т. 8(62).
5. Справочник химика. Т. 2. Основные свойства неорганических и органических соединений / Под ред. Б. П. Никольского. Л., 1971.

Статья поступила в редакцию 10 марта 2006 г.