УДК 622.831

РАЗРАБОТКА НЕЛИНЕЙНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОГНОЗА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД

А.П.ГОСПОДАРИКОВ
Санкт-Петербургский горный университет, Россия

В статье рассмотрены вопросы, связанные с построением нелинейных математических моделей напряженно-деформированного состояния слоистого неоднородного массива горных пород в окрестности выработки в пологих пластах. К основной системе разрешающих дифференциальных уравнений в частных производных (уравнения равновесия) и известных зависимостей Коши (формулы связи между деформациями и перемещениями) приводятся нелинейные физические соотношения между напряжениями и деформациями. Последние задаются как с помощью упругого потенциала, так и в виде степенного закона упрочнения или линейного закона упрочнения.

В рамках принятых гипотез теории малых упругопластических деформаций Генки – Ильюшина разработаны алгоритмы и вычислительные комплексы решения прикладных задач геомеханики с применением численных методов: метода конечных разностей, метода конечных элементов, метода граничных элементов. Нелинейные краевые задачи на основе метода линеаризации Ньютона – Канторовича – Рафсона сводятся к итерационному процессу решения последовательности линейных краевых задач.

***Ключевые слова*:** неоднородный массив горных пород, горная выработка, нелинейное деформирование пород, теория малых упругопластических деформаций Генки – Ильюшина, метод линеаризации Ньютона – Канторовича – Рафсона, общий итерационный процесс, численные методы и вычислительные комплексы.

***Как цитировать эту статью*:** Господариков А.П. Разработка нелинейных математических моделей и численное моделирование прогноза напряженно-деформированного состояния массива горных пород // Записки Горного института. 2016. Т.219. С.382-386. DOI 10.18454/PMI.2016.3.382

Проектирование и строительство горных выработок, сооружение подземных объектов различного назначения на больших глубинах и добыча полезных ископаемых в сложных горно-геологических условиях тесно связаны с анализом основных параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) массивов горных пород: полей напряжений, деформаций и перемещений. Под действием статических и динамических нагрузок горные породы вокруг горных выработок переходят в предельное состояние и разрушаются в условиях неоднородного поля напряжений. Как правило, при этом наблюдается динамическое разрушение горных пород в форме вывалов, внезапных выбросов, горных ударов.

Поэтому отработка запасов полезных ископаемых связана с техногенным «возмущением» исследуемой среды – массива горных пород. Последний весьма сложен по строению, различен по своим геомеханическим свойствам и характеризуется широким разнообразием законов изменения его НДС. Широкий круг проблем управления геомеханическими процессами в массиве горных пород связан с очистными выработками и, как следствие, выемкой полезного ископаемого из недр, т.е. наличием в пределах выемочных участков выработанных пространств. Результаты решения таких задач геомеханики позволяют не только обеспечивать безопасность работ в очистных застоях, но и определять выбор рациональных технологических решений. Последнее достигается исследованием НДС горных пород непосредственной и основной кровли пластов, представленной неоднородными элементами массива.

Таким образом, важная задача обеспечения длительного срока службы горных выработок в условиях неоднородного объемного (или в силу принятых обоснованных допущений плоского) напряженного состояния, возникающего вследствие ведения горных работ на больших глубинах (800 м и более), приводит исследователя к необходимости дальнейшего совершенствования методов оценки основных параметров НДС приконтурного массива горных пород с последующей проверкой полученных результатов как в лабораториях, так и в шахтных условиях.

Отметим, что многие инженерные методы расчета в силу принимаемых гипотез и допущений, как правило, не дают обоснованных ответов на разнообразные вопросы, выдвигаемые горной геомеханикой. Поэтому наряду с расчетными методами, основанными на шахтных наблюдениях и физическом моделировании, в настоящее время весьма успешно разрабатываются и применяются также эффективные методы численного моделирования [1, 4, 9, 12, 15].

Численное математическое моделирование для решения важных прикладных задач геомеханики является наиболее перспективным по ряду причин, во-первых, в связи наличием мощных ЭВМ (в том числе и ПК) и, во-вторых, в силу высокой эффективности современных приближенных вычислительных методов, позволяющих проектировать и эксплуатировать горные выработки на основе результатов прогнозного расчета основных параметров НДС вмещающего их реального (неоднородного) массива горных пород.

Таким образом, обеспечение надежных прогнозных оценок геомеханических процессов в массиве, в том числе параметров полей напряжений, деформаций и перемещений, адекватно соответствующих горно-техническим условиям, тесно связано с разработкой универсальных методов численного математического моделирования, позволяющих в прикладном плане своевременно предотвращать опасные проявления горного давления, обеспечивать безопасность ведения горных работ, минимизировать затраты на проведение и эксплуатацию горных выработок и т.д.

На основе разработанных геомеханических моделей массива горных пород при разработке пластовых месторождений в виде трехмерных (двумерных) пакетов нелинейно-деформируемых породных слоев с различными условиями на контактах и расположенных внутри них полостей, имеющих конфигурации исследуемых горных выработок, обоснован выбор математических моделей, характеризующихся системами нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими граничными условиями на контурах полостей и в точках массива горных пород за пределами зон влияния последних [4-8].

Отметим, что практически определить НДС массива горных пород в рамках применения классических (аналитических) методов сплошных сред не представляется возможным. Для исследуемого объема – массива, вмещающего горные выработки, характерны не только процесс нелинейного деформирования пород, но и наличие неоднородности, трещиноватости, анизотропности и т.д. Поэтому для исследования НДС массива горных пород необходимо применять комплекс эффективных численных методов: конечных разностей (МКР), конечных элементов (МКЭ), граничных элементов (МГЭ) и др., позволяющих получить численные результаты решения важных прикладных геомеханических задач, достаточно точно описывающих реальное поведение массива горных пород [1, 4-9, 12, 15].

В работах [5, 8] предложены математические модели НДС массива горных пород в виде двумерного пакета нелинейно-деформируемых породных слоев с различными граничными условиями на контактах и расположенных внутри них полостей, имеющих конфигурации исследуемых горных выработок.

Построение эффективных численных алгоритмов решения прикладных задач механики горных пород тесно связано также и с разработками эффективных программных продуктов (вычислительных комплексов) [1, 4-8]. Последние базируются на комплексном использовании численных методов МКР, МКЭ и МГЭ в зависимости от решаемой важной прикладной задачи, учитывающей не только конструктивные особенности горной выработки, геомеханические свойства горных пород (E, ν), но и вид упругого потенциала П, или закона упрочнения [10, 16] Так, для упругой среды (грунтового массива) можно в качестве потенциала рассматривать выражение вида [6, 7]:

$$\Pi = \frac{\lambda}{\nu}\left[I_1^2(1-\nu) - I_2(1-2\nu)\right], \quad (1)$$

где I_1, I_2 – первый и второй инварианты тензора деформаций, соответственно; λ – константа Ламе; ν – коэффициент Пуассона.

В работе при построении математических моделей для определения НДС массива горных пород используются гипотезы малых упругопластических деформаций, введенные Г.Генки [3], развитые и обоснованные А.А.Ильюшиным [10]. Необходимые для построения таких моделей физические соотношения базируются на следующих основных гипотезах теории пластичности А.А.Ильюшина: гипотеза упругости объемной деформации (изменение объема происходит только за счет упругих деформаций, а при пластических деформациях материал горных пород ведет себя как несжимаемый; гипотеза пропорциональности девиаторов (компоненты девиатора тензора напряжений пропорциональны компонентам девиатора тензора деформаций); гипотеза упрочнения (для любого материала горных пород независимо от характера напряженного состояния имеется вполне определенная зависимость между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций), заданная функциональной зависимостью вида [13]:

$$\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i). \quad (2)$$

Таким образом, необходимая функциональная зависимость (2) напряжений от деформаций (при условии пропорционального возрастания внешних сил) является в общем случае нелинейной. Выделим в зависимости (2) упругую часть:

$$\sigma_i = 3G\varepsilon_i\left[1 - \omega(\varepsilon_i)\right], \quad (3)$$

где G – модуль сдвига материала горных пород; $\omega(\varepsilon_i)$ – введенная функция, вычисляемая по формуле

$$\omega = \omega(\varepsilon_i) = 1 - \frac{1}{3G}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}. \tag{4}$$

В частности, если кривая функциональной зависимости Ф(ε) (диаграмма деформирования σ – ε) допускает с достаточной точностью замену ее ломанной с координатами точки излома (ε_s, σ_s), где $\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E}$; σ_s – предел текучести материала горных пород; E – модуль упругости материала горных пород, то аналитическое выражение введенной функции ω в случае линейного закона упрочнения можно принять в виде

$$\begin{cases} \omega = 0, \quad \varepsilon \le \varepsilon_s; \\ \omega = \left(1 - \frac{E_1}{E}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon}\right), \varepsilon \ge \varepsilon_s, \end{cases} \tag{5}$$

где E_1 – модуль упрочнения; $E_1 = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$.

Для соляных пород калийных рудников экспериментально установлено, что функциональная зависимость (2) с достаточной точностью описывается степенной функцией вида

$$\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i) = A\varepsilon_i^s, \tag{6}$$

где параметры A, s – определяются по данным лабораторных испытаний образцов калийной соли конкретных месторождений [16]. Соответственно, введенная функция

$$\omega(\varepsilon_i) = 1 - \frac{A}{3G}\varepsilon_i^{s-1}. \tag{7}$$

Для горных пород необходимый физический закон устанавливается на основе кривой деформирования σ – ε, например, в виде известной модели Баха:

$$\sigma_i = B_i\varepsilon_i^n; \quad i = 1,2,3, \tag{8}$$

где B_i – коэффициенты деформирования; n – числовой показатель, определяются экспериментально для исследуемых горных пород.

Соответствующая нелинейная краевая задача для определения НДС массива горных пород, вмещающего горную выработку, сводится к некоторому операторному уравнению вида [14]

$$T(v) = 0, \tag{9}$$

где v – вектор-функция неизвестных переменных.

Построение необходимого итерационного процесса для решения операторного уравнения (9) осуществляется на основе метода линеаризации [2], позволяющего записать (9) в виде эквивалентного операторного уравнения вида

$$T_1(v)v + T_2(v) = 0. \tag{10}$$

В качестве метода линеаризации в работах [4-8] принят метод Ньютона – Канторовича – Рафсона [2,11], в котором

$$T_1(v) \equiv T_v'(v); \quad T_2(v) \equiv T(v) - T_1(v)v,$$

где T_v' – производная Фреше оператора T [14].

Используя метод линеаризации уравнения (9) в виде метода Ньютона – Канторовича – Рафсона [2, 11, 12] и вводя индексы итерации n, $n-1$, получим уравнение вида

$$T_v'\left(v^{n-1}\right)v^n + T\left(v^{n-1}\right) - T_v'\left(v^{n-1}\right)v^{n-1} = 0. \tag{11}$$

Последовательность v^n, $n = 1, 2,…$, определяется путем решения на каждом шаге итерационного процесса линейной краевой задачи, а с учетом перехода для численной реализации к соответствующей дискретной задаче, решение которой осуществляется МКР или МКЭ, или МГЭ, в зависимости от особенностей рассматриваемой прикладной геомеханической задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баклашов И.В.* Геомеханика. В 2-х томах. М.: Изд-во МГГУ, 2004.
2. *Беллман Р.* Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи / Р.Беллман, Р.Калаба. М.: Мир, 1968. 184с.
3. *Генки Г.* К теории пластических деформаций и вызываемых ими в материале остаточных напряжений // Теория пластичности. М.: Изд-во иностранной литературы, 1948. С.114-135.
4. *Господариков А.П.* Метод расчета нелинейных задач механики горных пород при подземной разработке пластовых месторождений / СПГГИ. СПб, 1999. 127 с.
5. *Господариков А.П.* Применение прямого варианта метода граничных элементов при решении геомеханических задач для условий Старобинского месторождения /А.П. Господариков, Л.А. Беспалов // Записки Горного института. 2008. Т.182. С.234-237.
6. *Господариков А.П.* Об одном алгоритме численного решения нелинейных краевых задач геомеханики / А.П.Господариков, М.А.Зацепин, А.В.Мелешко // Записки Горного института. 2012. Т.196. С.306-310.
7. *Господариков А.П.* Математическое моделирование прикладных задач механики горных пород и массивов / А.П.Господариков, М.А.Зацепин // Записки Горного института. 2014. Т.207. С.217-221.
8. *Господариков А.П.* Вычислительный комплекс для расчета прогнозируемых смещений контура протяженной горной выработки / А.П.Господариков, М.В.Максименко, А.А.Сидоренко // Горный информационно-аналитический бюллетень. 2016. № 5. С.36-42.
9. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
10. *Ильюшин А.А.* Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
11. *Канторович Л.В.* Приближенные методы высшего анализа / Л.В.Канторович, В.И.Крылов. М.: Физматгиз, 1962. 708 с.
12. *Крауч С.* Методы граничных элементов в механике твердого тела / С.Крауч, А.Старфилд. М.: Мир, 1987. 328 с.
13. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. Л.: Гостехиздат, 1948. 211 с.
14. Приближенное решение операторных уравнений / М.А.Красносельский, Г.М.Вайникко, П.П.Забрейко, Я.Б.Рутицкий, В.Я.Стеценко. М.: Наука, 1969. 456 с.
15. *Рихтмайер Р.* Разностные методы решения краевых задач / Р.Рихтмайер, К.Мортон. М.: Мир, 1972. 418 с.
16. *Ставрогин А.Н.* Механика деформирования и разрушения горных пород / А.Н.Ставрогин, А.Г.Протосеня. М.: Недра, 1992. 222 с.

Автор **А.П.Господариков**, *д-р техн. наук*, *профессор*, *gospodarikov@mail.ru* (*Санкт-Петербургский горный университет*, *Россия*)
Статья принята к публикации 15.03.2016.

NONLINEAR MATH MODEL DEVELOPMENT AND NUMERICAL MODEL OF STRAIN DEFORMED ROCK MASS CONDITIONS PROGNOSiS

A.P.GOSPODARIKOV
Saint-Petersburg Mining University, *Russia*

The article deals with the questions related to the development of math models of nonlinear strain deformed conditions of a laminar heterogeneous rock mass in the area of excavation in shallow formations. The non-linear relations between physical strains and deformations are added to the basic system of resolving differential equations in partial derivatives (equilibrium equations) and well-known Cauchy dependencies (formulas of connection between deformations and displacements). This ratio is defined by both the elastic potential and by exponential law of hardening or by linear hardening law.

Within the framework of the accepted hypotheses of Genki – Ilyushin theory of small elastoplastic deformations some algorithms and calculating complexes of solutions of applied geomechanics problems have been developed. They include such numerical methods as finite difference method, finite element method, and boundary element method. Nonlinear boundary problem based on Newton – Kantorovich – Raphson linearization method comes to the iterative process of a linear boundary problems sequence solution.

***Key words*:** heterogeneous rock mass, excavation, nonlinear deformation of rocks, Genki – Ilyushin theory of small elastoplastic deformations, Newton – Kantorovich – Raphson linearization method, general iterative process, numerical methods and calculating complexes.

***How to cite this article*:** Gospodarikov A.P. Nonlinear math model development and numerical model of strain deformed rock mass conditions prognosis. Zapiski Gornogo instituta. 2016. Vol.219, p.382-386. DOI 10.18454/PMI.2016.3.382

REFERENCES

1. *Baklashov I.V.* Geomekhanika (*Geomechanics*). In 2 vol. Moscow: Izd-vo MGGU, 2004.
2. *Bellman R.*, *Kalaba R.* Kvazilinearizatsiya i nelineynye kraevye zadachi (*Quasilinearization and nonlinear boundary-value problems*). Moscow: Mir, 1968, p.184.
3. *Genki G.* K teorii plasticheskikh deformatsiy i vyzyvaemykh imi v materiale ostatochnykh napryazheniy (*About the theory of plastic deformations and residual strains caused by these deformations in material*). Teoriya plastichnosti (*Theory of plasticity*). Moscow, Izd-vo inostrannoi literatury. 1948, p.114-135.

4. *Gospodarikov A.P.* Metod rascheta nelineynykh zadach mekhaniki gornykh porod pri podzemnoy razrabotke plastovykh mestorozhdeniy (*Computing method of nonlinear problems of rock mechanics in underground mining*). SPGGI. St. Petersburg. 1999, p.127.

5. *Gospodarikov A.P.*, *Bespalov L.A.* Primenenie pryamogo varianta metoda granichnykh elementov pri reshenii geomekhanicheskikh zadach dlya usloviy Starobinskogo mestorozhdeniya (*Application of a direct boundary element method for solving geomechanical problems in Starobin deposit*). Zapiski Gornogo instituta. 2008. Vol.182, p.234-237.

6. *Gospodarikov A.P.*, *Zatsepin M.A.*, *Meleshko A.V.* Ob odnom algoritme chislennogo resheniya nelineinykh kraevykh zadach geomekhaniki (*Numerical solution of nonlinear boundary-value problems of geomechanics*). Zapiski Gornogo instituta. 2012. Vol.196, p.306-310.

7. *Gospodarikov A.P.*, *Zatsepin M.A.* Matematicheskoe modelirovanie prikladnykh zadach mekhaniki gornykh porod i massivov (*Mathematical modeling of applied problems of rock mechanics*). Zapiski Gornogo instituta. 2014. Vol.211, p.217-221.

8. *Gospodarikov A.P.*, *Maksimenko M.V.*, *Sidorenko A.A.* Vychislitel'nyy kompleks dlya rascheta prognoziruemykh smeshcheniy kontura protyazhennoy gornoy vyrabotki (*Computing system for calculation of predictable displacements of the lengthy excavation contour*). Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten'. 2016. N 5, p.36-42.

9. *Zenkevich O.* Metod konechnykh elementov v tekhnike (*The finite element method in engineering*) Moscow: Mir, 1975, p.541.

10. *Il'yushin A.A.* Plastichnost' (*Plasticity*). Moscow: Gostekhizdat, 1948, p.376.

11. *Kantorovich L.V.*, *Krylov V.I.* Priblizhennye metody vysshego analiza (*Approximate methods of higher analysis*). Moscow: Fizmatgiz, 1962, p.708.

12. *Krauch S.*, *Starfild A.* Metody granichnykh elementov v mekhanike tverdogo tela (*Boundary element methods in solid mechanics*). Moscow: Mir, 1987, p.328.

13. *Novozhilov V.V.* Osnovy nelineynoy teorii uprugosti (*Fundamentals of nonlinear theory of elasticity*). Leningrad: Gostekhizdat, 1948. p.211.

14. *Krasnosel'skiy M.A.*, *Vaynikko G.M.*, *Zabreyko P.P.*, *Rutitskiy Ya.B.*, *Stetsenko V.Ya.* Priblizhennoe reshenie operatornykh uravneniy (*Approximate solution of operator equations*). Moscow: Nauka, 1969, p.456.

15. *Richtmyer R.D.*, *Morton K.W.* Raznostnye metody resheniya kraevykh zadach (*Difference methods for solving boundary-value problems*). Moscow: Mir, 1972, p.418.

16. *Stavrogin A.N.*, *Protosenya A.G.* Mekhanika deformirovaniya i razrusheniya gornykh porod (*Mechanics of rock deformation and failure*). Moscow: Nedra, 1992, p.222.

Author **A.P.Gospodarikov,** *Dr. of Engineering Sciences*, *Professor*, gospodarikov@mail.ru (*Saint-Petersburg Mining University*, *Russia*).

Manuscript Accepted 15.03.2016.