

УДК 622.271.322:531.781.2
DOI: 10.21209/2227-9245-2020-26-2-23-31

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МАССИВОВ ВОКРУГ ОЧИСТНОЙ КАМЕРЫ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ СЕЧЕНИЕМ (СООТНОШЕНИЕ СТОРОН = 5:1)

STRESSED STATE OF MASSIFIES AROUND CLEANING CAMERA WITH RECTANGULAR SECTION (RELATION OF THE PARTIES = 5:1)

Б. Жумабаев,
Кыргызско-Российский
Славянский университет
им. Б. Н. Ельцина, г. Бишкек
zhumabaev.beyshenbek@mail.ru



B. Zhumabaev,
Kyrgyz-Russian Slavic University
named after B. N. Yeltsin, Bishkek

А. К. Жамангапова,
Кыргызский национальный
аграрный университет
им. К. И. Скрябина, г. Бишкек
ainura-20.69@mail.ru



A. Zhamangapova,
Kyrgyz National Agrarian University
named after K. I. Scryabin, Bishkek

В массивах вокруг очистных камер в процессе отработки месторождений зачастую происходят внезапные разрушения горных масс, горные удары и выбросы пород в очистные камеры. Названные явления приводят к травмам и гибели людей, причиняют огромный материальный ущерб. В этой связи определение напряженного состояния массивов вокруг очистных камер как предварительный этап прогноза возможных процессов разрушений массивов является актуальной научно-практической задачей.

Создана и апробирована аналитическая модель напряженного и деформированного состояния вокруг камер с прямоугольным поперечным сечением, задача решена для камер с соотношением сторон 5:1. Процессы расчета полей напряжений и построение поверхностей напряжений выполнено в программной среде Matcad для двух вариантов действия сил. Первый вариант решен при действии силы гравитации, когда камера расположена на глубине $y = -400$ м. В этом случае $S_x = -50$ МПа; $S_y = -100$ МПа. Во втором случае кроме гравитационных сил учтено действие тектонической силы $T_x = -40$ МПа.

Посредством расчетов контурных напряжений показано, что возникают значения сжимающих напряжений до 741 МПа в зонах, где стенки и кровля камеры сопряжены. В средней части кровли возникают растягивающие напряжения, достигающие 47 МПа. Это обуславливает образование вертикальных трещин в кровле камеры, так как горные породы обладают слабой сопротивляемостью к растяжениям. При совместных действиях гравитационных и тектонических сил величины растягивающих напряжений уменьшаются почти в 2 раза.

Наличие четырех зон концентрации всех компонентов напряжений вокруг камеры и зон растяжений в средней части кровли камеры указывает вероятные зоны разрушения горных пород вокруг камеры (отношение сторон, равное 5:1).

Для прогноза вероятных зон разрушения горных пород вокруг камер необходимо исследовать вариации глубин заложений и отношений сторон камеры

Ключевые слова: боковой распор; горные породы; гравитационная сила; изолинии напряжений; интеграл типа Коши; конформное отображение; метод Мусхелишвили; напряжения; объемный вес пород; очистная камера; упругость; тектоническая сила

The treatment chamber is the main element in the extraction of minerals by underground mining. In the arrays around the treatment chambers, in the process of developing deposits, sudden destruction of rock masses, rock impacts, and rock emissions into the treatment chambers often occur. These terrible events often lead to deaths and cause huge material damage. For this reason, the determination of the stress state of the arrays around the treatment chambers is an actual scientific and practical task.

An analytical model of the strain and strain state around chambers with a rectangular cross section was created and tested; the problem is solved for chambers with a 5:1 aspect ratio. The processes of calculating stress fields and the construction of stress surfaces in the Matcad software environment are performed for two variants

of the action of forces. The first option is solved by the action of gravity when the camera is located at a depth of $y = -400\text{m}$. In this case, $S_x = -50\text{MPa}$, $S_y = -100\text{MPa}$. In the second case, in addition to gravitational forces, the action of the tectonic force $T_x = -40\text{MPa}$ was taken into account.

Calculations of the contour stresses show that there are occurrences of large values of compressive stresses up to 741MPa in two zones where the walls and roofs of the chamber are conjugated when all the columns of rocks are 100MPa . In the areas of the roof in its middle part there are tensile stresses reaching up to 47MPa . This fact indicates the massifs of rocks in the roof of the chamber the formation of vertical cracks, given the weak resistance of rocks to stretching. With the combined actions of gravitational and tectonic forces, the magnitude of tensile stresses decreases almost 2 times.

The presence of four concentration zones of all stress components around the chamber and tensile zones in the middle part of the chamber roof indicate the likely destruction zones of rocks around the chamber (aspect ratio equal to 5:1).

To predict the likely zones of rock destruction around the chambers, it is necessary to investigate with varying depths and the ratio of the sides of the chamber

Key words: lateral strut; rocks; gravitational force; stress isolines; Cauchy type integral; conformal mapping; Muskhelishvili method; stresses; rock bulk density; treatment chamber; elasticity; tectonic force

Введение. При подземной разработке недр основным элементом добычи полезных ископаемых являются очистные камеры, которые располагается на различной глубине и имеют различные конфигурации и размеры. В процессе добычи ископаемых в массиве горных пород вокруг камеры часто происходят внезапные разрушения в виде выбросов пород и газа, горных ударов.

В научной литературе начальное напряженное состояние горного массива до образования камеры называется «напряженным состоянием земной коры» и может являться объектом изучения ряда направлений наук о Земле.

Инструментальное измерение напряжений в массивах во многих частях земной коры [4; 11–13; 15; 17; 18] доказывает наличие кроме гравитационных полей напряжений так называемых тектонических полей напряжений. Особенностью этих полей является горизонтальная (или близко к горизонтальной) ориентированность и изменчивость числовых значений. Поэтому существующие модельные представления полей напряжений вокруг подземных горных выработок или тоннелей различного назначения с учетом действия силы гравитации [1; 5–7] требуют усовершенствования таким образом, чтобы учитывалось совместное действие гравитационных и тектонических сил.

В работе исследуется камера прямоугольного сечения с соотношением сторон 5:1. Г. Н. Савин такое отверстие рассматривает в поле одноосного растяжения-сжатия [16]. В этой связи используем готовую по-

строенную отображающую функцию и метод Колосова – Мусхелишвили [14; 16]. Аппарат теории функции комплексного переменного и возможности программного комплекса Matcad упрощают решение поставленной задачи, как показано в работах Д. Кириянова, Б. А. Ботокановой и Б. Жумабаева [3; 8; 10].

Постановка задачи. Модель напряженного состояния массивов пород вокруг очистной камеры прямоугольного сечения отыскивается в виде суммы полей напряжений [2; 9]

$$\sigma_x = \sigma_x^n + \sigma_x^k \quad \sigma_y = \sigma_y^n + \sigma_y^k \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^n + \tau_{xy}^k \quad (1)$$

Напряжения с верхним индексом «п» – поле напряжений для полуплоскости $y \leq 0$, которое возникает при совместном действии гравитационных сил γ и горизонтальных тектонических сил. Сила гравитации γ направлена вертикально вниз, т. е. вглубь массива земной коры. Эти поля напряжений являются интегралами неоднородных дифференциальных уравнений равновесия для полуплоскости $y \leq 0$ [2; 4; 11–13; 15; 17; 18]

$$\frac{\partial \sigma_x^n}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^n}{\partial y} + \rho_x = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}^n}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y^n}{\partial y} + \rho_y = 0, \quad (2)$$

где $\rho_x = 0$ – горизонтальные и вертикальные $\rho_y = \rho = \rho g$ составляющие объемной силы;

g – гравитационное ускорение;

ρ – плотность горной породы;

T_x – интенсивность горизонтальной тектонической силы.

Интегралы от (2) имеют вид

$$\sigma_x^n = A_1 * y + T_x; \quad \sigma_y^n = A_2 y; \quad \tau_{xy}^n = A_3 y, \quad (3)$$

где $A_1 = \lambda y$;

$A_2 = y$;

λ – коэффициент бокового распора;

T_x – тектоническая сила, направленная горизонтально;

y – расстояние от границы дневной поверхности до рассматриваемого центра камеры.

До возникновения камеры в массиве в глубине $y = -H$ имеет место начальное напряженное состояние массива [1; 4–7]

$$S_x = -A_1 \cdot H + T_x; S_y = -A_2 \cdot H; S_{xy} = 0. \quad (4)$$

Влияние напряжений $\sigma_x^k, \sigma_y^k, \tau_{xy}^k$ вокруг камеры устанавливается путем решения граничной задачи для плоскости хоу с отверстием, форма которого моделируется с помощью отображающей функции [5; 16]

$$z = \omega(\zeta); \zeta = \rho e^{i\theta}. \omega(\zeta) = e^{i\delta} R[\zeta + \omega_0(\zeta)];$$

$$\omega_0(\zeta) = \sum_{k=1}^7 d_k / \zeta^k. \quad (5)$$

Используя параметры отображающей функции $d_1 = 0,643$; $d_3 = -0,098$; $d_5 = -0,038$; $d_7 = -0,011$; $R=1$; $\delta = \pi/2$, моделируем камеру прямоугольного сечения с отношением сторон, равным 5:1 (рис. 1). Вертикальное расположение камеры соответствует значению $\delta = \pi/2$, а горизонтальное имеет место при $\delta = 0$.

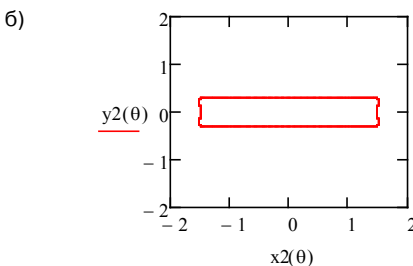
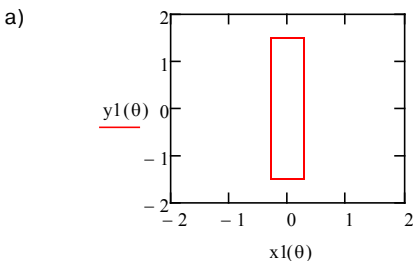


Рис. 1. Вертикальное (а) и горизонтальное (б) расположение камеры / Fig. 1. Vertical (a) and horizontal (b) camera position

Поле напряжений $\sigma_x^k, \sigma_y^k, \tau_{xy}^k$ от расположения камеры в криволинейных координатах $\zeta = \rho e^{i\theta}$ обозначается через $\sigma_\rho^k, \sigma_\theta^k, \tau_{\rho\theta}^k$ и будет

определено из граничных условий [11–13; 15; 17; 18]

$$[R\Gamma\sigma + \varphi(\sigma)] + [R\bar{\Gamma} + \bar{\varphi}'(\sigma)] * [\omega(\sigma) / \bar{\omega}'(\sigma)] + [\overline{R\Gamma'\sigma + \psi(\sigma)}] = 0, \quad (6)$$

$$[\overline{R\Gamma\sigma + \varphi(\sigma)}] + [R\Gamma + \varphi'(\sigma)] * [\bar{\omega}(\sigma) / \omega'(\sigma)] + [R\Gamma'\sigma + \psi(\sigma)] = 0. \quad (7)$$

Решение граничных задач (6) и (7). Для отношений в (6) и (7) имеет место разложение

$$\frac{\omega(\sigma)}{\bar{\omega}'(\sigma)} = e^{-2i\delta} [f_1(\sigma) + f_2(\sigma)];$$

$$\frac{\omega(\sigma)}{\bar{\omega}'(\sigma)} = e^{2i\delta} [f_3(\sigma) + f_4(\sigma)]; \quad (8)$$

Здесь обозначают

$$f_1(\sigma) = b_7 \sigma^7 + b_5 \sigma^5 + b_3 \sigma^3 + b_1 \sigma;$$

$$f_2(\sigma) = \frac{q_7 \sigma^7 + q_5 \sigma^5 + q_3 \sigma^3 + q_1 \sigma}{\sigma^8 - d_1 \sigma^4 - 3d_3 \sigma^2 - 5d_5 - 7d_7};$$

$$f_3(\sigma) = \frac{q_7 \sigma + q_5 \sigma^3 + q_3 \sigma^5 + q_1 \sigma^7}{1 - d_1 \sigma^2 - 3d_3 \sigma^4 - 5d_5 \sigma^6 - 7d_7 \sigma^8};$$

$$f_4(\sigma) = \frac{b_7}{\sigma^7} + \frac{b_5}{\sigma^5} + \frac{b_3}{\sigma^3} + \frac{b_1}{b}$$

Постоянные b_k и q_k ($k = 1...7$) определяются через d_k в виде

$$b_7 = d_7; b_5 = d_5 + d_1 b_7;$$

$$q_7 = 1 + 7d_7 b_7 + 5d_5 b_5 + 3d_3 b_3 + d_1 b_1;$$

$$b_3 = d_3 + 3d_3 b_7 + d_1 b_5;$$

$$q_5 = 7d_7 b_5 + 5d_5 b_3 + 3d_3 b_1;$$

$$b_1 = d_1 + 3d_3 b_5 + 5d_5 b_7 + d_1 b_3;$$

$$q_3 = 7d_7 b_3 + 5d_5 b_1; q_1 = 7d_7 b_1.$$

Соотношения (8) являются граничными значениями функций

$$f_1(\zeta) = e^{-2i\delta} [b_7 \zeta^7 + b_5 \zeta^5 + b_3 \zeta^3 + b_1 \zeta] \text{ при } |\zeta| \leq 1$$

$$f_2(\zeta) = e^{-2i\delta} \frac{q_7 \zeta^7 + q_5 \zeta^5 + q_3 \zeta^3 + q_1 \zeta}{\zeta^8 - d_1 \zeta^6 - 3d_3 \zeta^4 - 5d_5 \zeta^2 - 7d_7}$$

при $|\zeta| \geq 1$

$$f_3(\zeta) = e^{-2i\delta} \left[b_0 + \frac{q_7 \zeta + q_5 \zeta^3 + q_3 \zeta^5 + q_1 \zeta^7}{1 - d_1 \zeta^2 - 3d_3 \zeta^4 - 5d_5 \zeta^6 - 7d_7 \zeta^8} \right]$$

при $|\zeta| \leq 1$

$$f_4(\zeta) = e^{-2i\delta} \left[\frac{b_7}{\zeta^7} + \frac{b_5}{\zeta^5} + \frac{b_3}{\zeta^3} + \frac{b_1}{\zeta} \right] \text{ при } |\zeta| \geq 1. \quad (9)$$

Учитывая разделение выражений в (6) и (7) с учетом области их определения соответственно для внешнего и для внутреннего единичного круга значений интегралов типа Коши [14] от всех шести слагаемых в (6) и (7) выписываем в явной форме

$$\begin{aligned}
 J_1(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L [\varphi_0(\sigma) + \Gamma R \sigma] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = -\varphi_0(\zeta); \\
 J_2(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[\frac{\Gamma R}{\sigma} + \overline{\psi_0(\sigma)} \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = -\frac{\Gamma R}{\zeta}; \\
 J_3(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[\overline{\varphi_0(\sigma)} + \frac{\Gamma R}{\sigma} \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = -\frac{\Gamma R}{\zeta}; \\
 J_4(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L [\psi_0(\sigma) + \overline{\Gamma R \sigma}] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = -\psi_0(\zeta); \\
 J_5(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \left\{ \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} [\Gamma R + \overline{\varphi_0(\sigma)}] \right\} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = -J_5(\zeta) + G_1(\zeta); \\
 J_6(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \left\{ \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} [\Gamma R + \varphi_0(\zeta)] \right\} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \\
 &= J_6(\zeta) + G_2(\zeta).
 \end{aligned}$$

Перечень постоянных величин для вычисления типа Коши от явно заданных граничных условий на контуре отверстия следующий:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= R * e^{i\delta} (S_x + S_y) / 2; \\
 N_2 &= R * e^{-i\delta} (S_y - S_x + 2iS_{xy}) / 2; \\
 N_3 &= \overline{N_1}; \quad N_4 = \overline{N_2}; \\
 N_1 &= Re^{i\delta} (S_x + S_y) / 4; \quad N_2 = Re^{-i\delta} (S_y - S_x + 2iS_{xy}) / 2; \\
 N_3 &= \overline{N_1}; \\
 ca_1 &= -N_1 d_1 - N_3; \quad ca_3 = -N_1 d_3; \quad ca_5 = -N_1 d_5; \\
 ca_7 &= -N_1 d_7; \\
 Sb_1 &= -N_4 d_1 - N_2; \quad Sb_3 = -N_4 d_3; \quad Sb_5 = -N_4 d_5; \\
 Sb_7 &= -N_4 d_7.
 \end{aligned}$$

Интегралы типа Коши от граничных условий в (6) и (7) имеют вид

$$\varphi(\zeta) + G(\zeta) = A_0(\zeta);$$

$$\varphi'(\zeta) * [\overline{\omega(\zeta)} / \omega'(\zeta)] + \psi(\zeta) - \overline{G(\zeta)} = B_0(\zeta); \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 G(\zeta) &= [b_3 \overline{R_1} + 2b_4 \overline{R_2} + 3b_5 \overline{R_3}] e^{2i\delta} \zeta^{-1} + \\
 &[b_4 \overline{R_1} + 2b_5 \overline{R_2}] e^{2i\delta} \zeta^{-2} + [b_5 \overline{R_1}] e^{2i\delta} \zeta^{-3};
 \end{aligned}$$

$$A_0(\zeta) = \sum_{k=1}^7 ca_k \zeta^{-k}; B_0(\zeta) = \sum_{k=1}^7 sb_k \zeta^{-k};$$

Вычисленные в (6) и (7) уравнения полностью определяются функциями

$$\varphi(\zeta) = \Gamma R \zeta + \varphi_0(\zeta); \quad \psi(\zeta) = \Gamma R \zeta + \psi_0(\zeta), \quad (11)$$

где обозначают:

$$\left. \begin{aligned}
 \varphi_0(\sigma) &= \frac{\Gamma R}{\zeta} - \Gamma \operatorname{Re}^{2i\delta} \left[\frac{b_7}{\zeta^7} + \frac{b_5}{\zeta^5} + \frac{b_3}{\zeta^3} + \frac{b_1}{\zeta} \right] - \\
 &- \overline{a_1} \cdot \left(\frac{b_7}{\zeta^5} + \frac{b_5}{\zeta^3} + \frac{b_3}{\zeta} \right) e^{2i\delta} - \overline{a_2} \cdot \left(\frac{2b_7}{\zeta^4} + \frac{2b_5}{\zeta^2} \right) e^{2i\delta} - \\
 &- \overline{a_3} \cdot \left(\frac{3b_7 e^{2i\delta}}{\zeta^3} + \frac{3b_5 e^{2i\delta}}{\zeta} \right) - \overline{a_4} \cdot \left(\frac{4b_7}{\zeta^2} \right) e^{2i\delta} \\
 &- \overline{a_5} \cdot \left(\frac{5b_7}{\zeta} \right) e^{2i\delta};
 \end{aligned} \right\} (12)$$

$$\psi_0(\zeta) = -J_6(\zeta) + G(\zeta) - \frac{\Gamma R}{\zeta}. \quad (13)$$

Для определения коэффициентов $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ или $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}, \overline{a_5}, \overline{a_6}, \overline{a_7}$, уравнение (12) преобразуем относительно искомым постоянных в виде

$$\left. \begin{aligned}
 &\frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \frac{a_3}{\zeta^3} + \frac{a_4}{\zeta^4} + \frac{a_5}{\zeta^5} + \frac{a_6}{\zeta^6} + \frac{a_7}{\zeta^7} + \dots \\
 &\left[\frac{b_7 \overline{a_1}}{\zeta^5} + \frac{2b_7 \overline{a_2}}{\zeta^4} + \frac{b_5 \overline{a_1} + 3a_3 \overline{b_7}}{\zeta^3} + \right. \\
 &\left. + \frac{(b_3 \overline{a_1} + 2a_2 \overline{b_5} + 3a_3 \overline{a_3})}{\zeta} \right] \\
 &e^{2i\delta} = \frac{\Gamma R}{\zeta} + \Gamma \operatorname{Re}^{2i\delta} \left[\frac{b_7}{\zeta^7} + \frac{b_5}{\zeta^5} + \frac{b_3}{\zeta^3} + \frac{b_1}{\zeta} \right]
 \end{aligned} \right\} (14)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ζk правых и левых частей уравнения (14), будем иметь систему шести линейных уравнений. Очевидно, что в (4) в правой части коэффициенты при ζk ($k \geq 6$) равны нулю, из чего следует, что $a_k = 0$ ($k \geq 8$). Кроме того имеем в явной форме $a_6 = 0$, $a_7 = b_7 \Gamma \text{Re}^{2i\delta}$. Коэффициенты a_1, a_2, a_3, a_5, a_7 или $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_5}, \overline{a_7}$, определяются из системы шести уравнений, которые вытекают из (14).

Система линейных алгебраических уравнений для вычисления значений постоянных в нотациях Matcad [10] записывается относительно коэффициентов системы квадратной матрицы M и ее правой части M_0 . Для матрицы M обозначено:

$$b\rho_7 = b_7 \cdot e^{2i\delta} \quad b\rho_5 = b_5 \cdot e^{2i\delta} \quad b\rho_3 = b_3 \cdot e^{2i\delta}$$

$$b\rho_1 = b_1 \cdot e^{2i\delta}$$

$$M_{0,0} = 1 \quad M_{0,1} = 0 \quad M_{0,2} = 0 \quad M_{0,3} = 0$$

$$M_{0,4} = 0 \quad M_{0,5} = -b\rho_3 \quad M_{0,6} = 0 \quad M_{0,8} = 0$$

$$M_{0,7} = -3 \cdot b\rho_5 \quad M_{0,9} = -5 \cdot b\rho_7 \quad M_{1,1} = 1$$

$$M_{1,0} = 0 \quad M_{1,2} = 0 \quad M_{1,3} = 0 \quad M_{1,4} = 0$$

$$M_{1,5} = 0 \quad M_{1,7} = 0 \quad M_{1,6} = -2 \cdot b\rho_5$$

$$M_{1,9} = 0 \quad M_{1,8} = -4 \cdot b\rho_7 \quad M_{2,0} = 0 \quad M_{2,1} = 0$$

$$M_{2,2} = 1 \quad M_{2,3} = 0 \quad M_{2,4} = 0 \quad M_{2,5} = -b\rho_5$$

$$M_{2,6} = 0 \quad M_{2,8} = 0 \quad M_{2,7} = -3b\rho_7 \quad M_{2,8} = 0$$

$$M_{2,9} = 0 \quad M_{3,0} = 0 \quad M_{3,1} = 0 \quad M_{3,2} = 0$$

$$M_{3,3} = 1 \quad M_{3,4} = 0 \quad M_{3,5} = 0 \quad M_{3,6} = -2 \cdot b\rho_7$$

$$M_{3,7} = 0 \quad M_{3,8} = 0 \quad M_{3,9} = 0 \quad M_{4,0} = 0 \quad M_{4,1} = 0$$

$$M_{4,2} = 0 \quad M_{4,3} = 0 \quad M_{4,4} = 1 \quad M_{4,5} = -b\rho_7$$

$$M_{4,6} = 0 \quad M_{4,7} = 0 \quad M_{4,8} = 0 \quad M_{4,9} = 0$$

$K1 = 0, 1, 2, 3, 4$ – параметры цикла.

$$M_{5,k1} = \overline{M_{0,k1+5}} \quad M_{5,k1+5} = \overline{M_{0,k1}} \quad M_{6,k1} = \overline{M_{1,k1+5}}$$

$$M_{6,k1+5} = \overline{M_{1,k1}} \quad M_{7,k1} = \overline{M_{2,k1+5}} \quad M_{7,k1+5} = \overline{M_{2,k1}}$$

$$M_{8,k1} = \overline{M_{3,k1+5}} \quad M_{8,k1+5} = \overline{M_{3,k1}} \quad M_{9,k1} = \overline{M_{4,k1+5}}$$

$$M_{9,k1+5} = \overline{M_{0,k1}}$$

Коэффициенты для правой части системы уравнений:

$$M0_0 = ca1 \quad M0_1 = 0 \quad M0_2 = ca3 \quad M0_3 = 0$$

$$M0_4 = ca5 \quad M0_5 = \overline{M0_0} \quad M0_6 = 0 \quad M0_7 = \overline{M0_2}$$

$$M0_8 = 0 \quad M0_9 = \overline{M0_4}$$

Решение этой системы имеет вид $MR = M^{-1} * M_0$ [10]. После решения системы приводим значения для промежуточных постоянных и выражений:

$$\gamma_1 = (b_3 \cdot MR_5 + 3b_5 \cdot MR_7 + 5 \cdot b_5 \cdot MR_9) \cdot e^{(2i\delta)}$$

$$\gamma_2 = (2 * b_5 \cdot MR_6 + 4b_7 \cdot MR_8) \cdot e^{(2i\delta)}$$

$$\gamma_3 = (3b_7 \cdot MR_7 + b_5 \cdot MR_5) \cdot e^{(2i\delta)}$$

$$\gamma_4 = (2 * b_7 \cdot MR_6) \cdot e^{(2i\delta)}$$

$$\gamma_5 = b_7 \cdot MR_5 \cdot e^{(2i\delta)}$$

$$C_1 = ca_1 + \gamma_1 \quad C_2 = \gamma_2 \quad C_3 = ca_3 + \gamma_3 \quad C_4 = \gamma_4$$

$$C_5 = ca_5 + \gamma_5 \quad C_7 = ca_7$$

$$\Phi(\rho, \theta) = \left(\frac{C_1}{\zeta(\rho, \theta)} + \frac{C_3}{\zeta(\rho, \theta)^3} + \frac{C_5}{\zeta(\rho, \theta)^5} + \frac{C_7}{\zeta(\rho, \theta)^7} \right)$$

$$\Phi_{\rho 1}(\rho, \theta) = \left(\frac{-C_1}{\zeta(\rho, \theta)^2} + \frac{-3 \cdot C_3}{\zeta(\rho, \theta)^4} + \frac{-5 \cdot C_5}{\zeta(\rho, \theta)^6} + \frac{-7 \cdot C_7}{\zeta(\rho, \theta)^8} \right)$$

$$\Phi_{\rho 2}(\rho, \theta) = \left(\frac{2 \cdot C_1}{\zeta(\rho, \theta)^2} + \frac{12 \cdot C_3}{\zeta(\rho, \theta)^4} + \frac{30 \cdot C_5}{\zeta(\rho, \theta)^6} + \frac{56 \cdot C_7}{\zeta(\rho, \theta)^8} \right)$$

$$r_1 = (5 \cdot C_5 \cdot b_5 + 3 \cdot C_3 \cdot b_3 + 7 \cdot C_7 \cdot b_7)$$

$$r_3 = (5 \cdot C_5 \cdot b_3 + 7 \cdot C_7 \cdot b_5)$$

$$r_2 = 0 \quad r_5 = 7 \cdot C_7 \cdot b_3 \quad r_4 = 0 \quad r_6 = 0$$

$$R_0(\rho, \theta) = \left(\frac{r_1}{\zeta(\rho, \theta)} + \frac{r_3}{\zeta(\rho, \theta)^3} + \frac{r_5}{\zeta(\rho, \theta)^5} \right) \cdot e^{-(2i\delta)}$$

$$R_{0\rho 1}(\rho, \theta) = \left(\frac{-r_1}{\zeta(\rho, \theta)^2} + \frac{-3r_3}{\zeta(\rho, \theta)^4} + \frac{-5r_5}{\zeta(\rho, \theta)^6} \right) \cdot e^{-(2i\delta)}$$

$$\omega_d(\rho, \theta) = \zeta(\rho, \theta)^8 - d_1 \cdot \zeta(\rho, \theta)^6 - 3d_3 \cdot \zeta(\rho, \theta)^4 - 5 \cdot d_5 \cdot \zeta(\rho, \theta)^2 - 7d_7$$

$$\omega_{dp}(\rho, \theta) = 8 \cdot \zeta(\rho, \theta)^7 - 6d_1 \cdot \zeta(\rho, \theta)^5 - 12d_3 \cdot \zeta(\rho, \theta)^3 - 10 \cdot d_5 \cdot \zeta(\rho, \theta)$$

$$Q(\rho, \theta) = q_7 \cdot \zeta(\rho, \theta)^7 + q_5 \cdot \zeta(\rho, \theta)^5 + q_3 \cdot \zeta(\rho, \theta)^3 + q_1 \cdot \zeta(\rho, \theta)$$

$$Q_p(\rho, \theta) = 7 \cdot q_7 \cdot \zeta(\rho, \theta)^6 + 5 \cdot q_5 \cdot \zeta(\rho, \theta)^4 + 3 \cdot q_3 \cdot \zeta(\rho, \theta)^2 + q_1$$

$$f(\rho, \theta) = \left(b_1 \cdot \zeta(\rho, \theta) + \frac{Q(\rho, \theta)}{\omega_d(\rho, \theta)} \right) \cdot e^{-(2i\delta)}$$

$$f_p(\rho, \theta) = \left(b_1 + \frac{Q(\rho, \theta) \cdot \omega_d(\rho, \theta) - Q(\rho, \theta) \cdot \omega_{dp}(\rho, \theta)}{\omega_d(\rho, \theta)^2} \right) \cdot e^{-(2i\delta)}$$

$$\Phi(\rho, \theta) = \frac{\Phi_{p1}(\rho, \theta)}{\omega_{p1}(\rho, \theta)}$$

$$\Phi_p(\rho, \theta) = \frac{(\Phi_{p2}(\rho, \theta) \cdot \omega_{p1}(\rho, \theta) - \omega_{02}(\rho, \theta) \cdot \Phi_{p1}(\rho, \theta))}{(\omega_{p1}(\rho, \theta))^2}$$

$$\psi(\rho, \theta) = B_0(\rho, \theta) + R_0(\rho, \theta) - f(\rho, \theta) \cdot \Phi_{p1}(\rho, \theta)$$

$$\psi_p(\rho, \theta) = B_{p1}(\rho, \theta) + R_{0p1}(\rho, \theta) - f_p(\rho, \theta) \cdot \Phi_{p1}(\rho, \theta) - f(\rho, \theta) \cdot \Phi_{p2}(\rho, \theta)$$

$$\psi(\rho, \theta) = \frac{\psi_p(\rho, \theta)}{\omega_{p1}(\rho, \theta)}$$

Таким образом, задача математического описания напряженного и деформированного состояния вокруг камер с прямоугольным поперечным сечением с соотношением сторон 5:1 решена.

Пример расчета полей напряжений вокруг камеры. Процессы расчета полей на-

пряжений и построение поверхностей напряжений в программной среде Matcad [10] выполнены для двух вариантов действия сил. Первый вариант при действии силы гравитации, когда камера расположена на глубине $y = -400$ м. В этом случае $S_x = -50$ МПа, $S_y = -100$ МПа. Во втором случае кроме гравитационных сил учтено действие тектонической силы $T_x = -40$ МПа. Выполнен расчет напряжений в контурных точках камеры $\sigma_p, \sigma_\theta, \tau_{p\theta}$. Значения напряжений $\sigma_p, \sigma_\theta, \tau_{p\theta}$ в таблице указывают, что граничные условия (6) и (7) выполняются с высокой точностью, погрешность составляет не более 10^{-13} . Последние два столбца содержат значения контурных напряжений для двух вариантов нагружения горного массива. Концентрация сжимающих напряжений достигает в угловых точках контура до 740 МПа, а растягивающие значения напряжений – до 47 МПа.

Компоненты напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ в декартовых координатах и с компонентами напряжений $\sigma_p, \sigma_\theta, \tau_{p\theta}$ в криволинейных координатах выражаются формулами Мусхелишвили [18]

$$\sigma_p + \sigma_\theta = \sigma_x + \sigma_y - \sigma_\theta - \sigma_p + 2i\tau_{p\theta} = (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy})e^{2i\delta} \tag{15}$$

Таблица 1 / Table 1

Компоненты напряжений в контурных точках камеры / Stress components camera contour points

σ_p ()	$\tau_{p\theta}$ ()	σ_θ ()	σ_θ ()
7,105*10 ⁻¹⁴	0	-213,288	-198,332
-1,421*10 ⁻¹⁴	-4,157*10 ⁻¹³	-281,979	-265,752
3,979*10 ⁻¹³	4,444*10 ⁻¹²	-741,17	-738,977
-2,089*10 ⁻¹²	-1,67*10 ⁻¹²	-252,375	-308,554
7,105*10 ⁻¹⁴	2,087*10 ⁻¹³	1,017	-30,51
-1,99*10 ⁻¹³	1,688*10 ⁻¹⁴	30,108	4,563
8,527*10 ⁻¹⁴	-7,683*10 ⁻¹⁴	39,978	15,205
4,263*10 ⁻¹⁴	-3,064*10 ⁻¹⁴	45,251	20,583
-9,948*10 ⁻¹⁴	5,351*10 ⁻¹⁴	46,88	22,948
-2,842*10 ⁻¹⁴	0	46,957	23,496
9,948*10 ⁻¹⁴	-5,285*10 ⁻¹⁴	46,88	22,948
1,137*10 ⁻¹³	2,931*10 ⁻¹⁴	45,251	20,583
2,842*10 ⁻¹⁴	2,176*10 ⁻¹⁴	39,978	15,205
-1,99*10 ⁻¹³	-1,688*10 ⁻¹⁴	30,108	4,563
-5,684*10 ⁻¹³	-4,876*10 ⁻¹³	1,017	-30,51
-2,089*10 ⁻¹²	1,67*10 ⁻¹²	-252,375	-308,554
8,953*10 ⁻¹³	3,601*10 ⁻¹²	-741,17	-738,977
-1,847*10 ⁻¹³	-4,956*10 ⁻¹³	-281,979	-265,752
4,263*10 ⁻¹⁴	0	-231,228	-198,332
4,974*10 ⁻¹⁴	2,753*10 ⁻¹⁴	-281,979	-265,752
...

Величины значений в этой формуле при заданном отображающей функцией типа (5) вычисляются соотношениями [7; 14]

$$e^{2ia} = \frac{\zeta^2}{\rho^2} \cdot \frac{\omega'(\zeta)^2}{\omega(\zeta) \cdot \overline{\omega(\zeta)}} = \frac{\zeta^2 \omega'(\zeta)}{\rho^2 \omega(\zeta)}; \quad e^{-2ia} = \frac{\overline{\zeta^2 \omega'(\zeta)}}{\rho^2 \overline{\omega(\zeta)}}$$

Поскольку сила гравитации направлена вдоль оси ou , а тектоническая сила – вдоль оси ox , результаты расчета полей напряжений вокруг камер привязаны к осям ox и ou . На рис. 2 представлены закономерности распределения напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, которые

возникают при действии силы гравитации, на рис. 3 распределения напряжений, возникающих при совместном действии гравитационных и тектонических сил. Процедура перехода от напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ в декартовых коэффициентах $hoу$ к компонентам напряжений $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \tau_{\rho\theta}$ в криволинейных координатах или обратный переход координатных систем осуществляется без особых затруднений, как это проделано в работах Н. И. Мухешвили, Б. А. Ботокановой и Б. Жумабаева [3; 8; 14] при исследовании напряжений вокруг гидротехнических тоннелей.

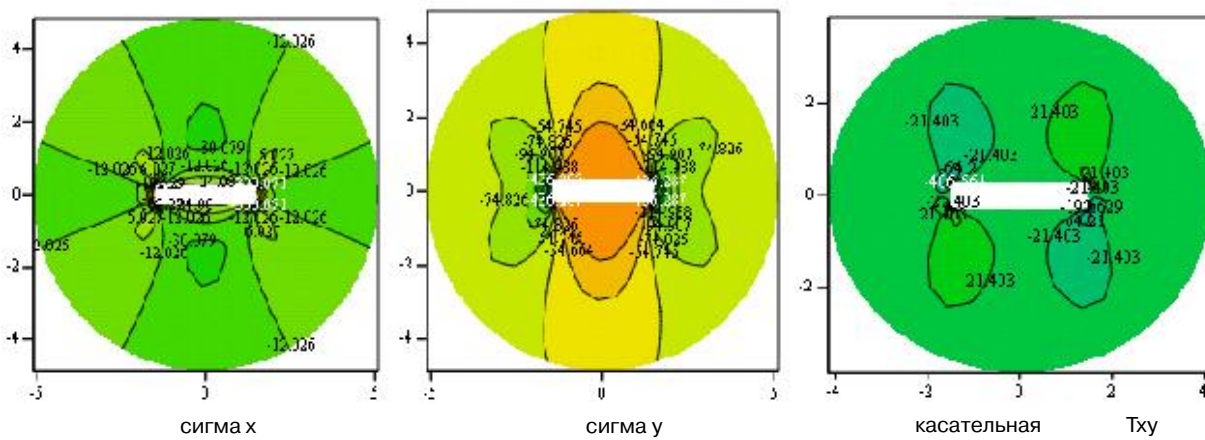


Рис. 2. Распределение напряжений от действия силы гравитации /
Fig. 2. Stress distribution from the action of gravitational forces

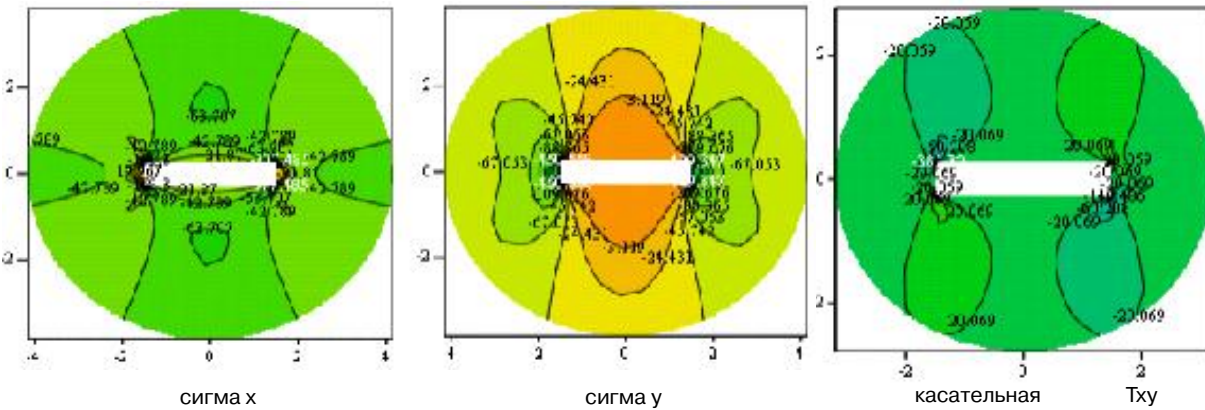


Рис. 3. Распределение напряжений при совместном действии гравитационных и тектонических сил /
Fig. 3. Stress distribution under the combined action of gravitational and tectonic forces

Заключение. Создана математическая модель напряженного состояния массивов вокруг камеры с прямоугольным сечением, у которого соотношение сторон равно 5:1. Для математического моделирования использован метод Колосова – Мухелишвили и отображения Г. Н. Савина с внешним прямоуголь-

ным отверстием на внешнем единичном круге. Модель применена для прогноза распределения напряжений для двух вариантов действия в массиве сил. В первом варианте учитывается действие только силы гравитации, во втором кроме силы гравитации рассматривается горизонтальное тектоническое сжатие.

Список литературы

1. Авершин С. Г., Балалаева С. А., Груздев В. Н. Распределение напряжений вокруг горных выработок. Фрунзе: Илим, 1971. 130 с.
2. Айтматов И. Т., Кожоголов К. Ч. Напряженное состояние и прочность элементов систем разработок крутопадающих месторождений Средней Азии. Фрунзе: Илим, 1988. 123 с.
3. Ботоканова Б. А., Жумабаев Б. Расчет напряжений и деформаций массивов вокруг напорного туннеля трапецевидным сечением // *European Journal of Technical and Natural Sciences*. 2018. № 3. С. 16–27.
4. Джефферс Г. Земля, ее происхождение, история и строение. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 485 с.
5. Динник А. Н., Моргаевский А. Б., Савин Г. Н. Распределение напряжений вокруг подземных выработок // Труды совещания по управлению горным давлением. М.: Изд-во АН СССР, 1938. С. 7–55.
6. Ержанов Ж. С., Айтиалиев Ш. М., Масанов Ж. К. Сейсмонапряженное состояние подземных сооружений в анизотропном слоистом массиве. Алма-Ата: Наука, 1980. 211 с.
7. Жумабаев Б. Распределение напряжений в массивах пород с гористым рельефом. Фрунзе: Илим, 1988. 190 с.
8. Жумабаев Б., Ботоканова Б. А. Методика математического моделирования напряженного состояния вокруг напорного туннеля, расположенного в горном массиве // *Естественные и технические науки*. 2018. № 8. С. 235–243.
9. Казикаев Д. М. Геомеханические процессы при совместной и повторной разработке руд. М.: Недра, 1981. 288 с.
10. Кирьянов Д. *МАТCAD № 14*. СПб.: БВХ-Петербург, 2007. 682 с.
11. Кропоткин П. Н., Макеев В. М. Современное напряженное состояние земной коры // *Современная тектоническая активность земли и сейсмичность*. М.: Наука, 1987. С. 192–200.
12. Крупенников Г. А., Филатов Н. А., Амосин Б. З., Барковский В. М. Распределение напряжений в породных массивах. М.: Недра, 1972. 144 с.
13. Кутепов В. М. Результаты изучения естественных напряжений в массивах трещиноватых пород горных склонов // *Вестник Московского университета. Серия 4. Геология*. 1966. № 6. С. 71–76.
14. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
15. Напряженное состояние земной коры (по измерениям в массивах горных пород) / под ред. П. Н. Кропоткин. М.: Наука, 1973. 185 с.
16. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наукова думка, 1968. 887 с.
17. Hast N. The measurements of rock pressure in mines. Stockholm, 1958. 183 p.
18. Hast N. The state of stresses in the upper part of the Earth's crust // *Engineering Geology*. 1967. Vol. 2, No. 1. P. 5–17.

References

1. Avershin S. G., Balalaeva S. A., Gruzdev V. N. *Raspredeleniye napryazheniy vokrug gornykh vyrobotok* (Distribution of stresses around mine workings). Frunze: Ilim, 1971. 130 p.
2. Aitmatov I. T., Kozhogulov K. Ch. *Napryazhennoye sostoyaniye i prochnost elementov sistem razrabotok krutopadayushchikh mestorozhdeniy Sredney Azii* (Stress and strength of elements of development systems for steeply dipping deposits in Central Asia). Frunze: Ilim, 1988. 123 p.
3. Botokanova B. A., Zhumabaev B. *European Journal of Technical and Natural Sciences* (European Journal of Technical and Natural Sciences), 2018, no. 3, pp. 16–27.
4. Jeffers G. *Zemlya, yeye proiskhozhdeniye, istoriya i stroyeniye* (Earth, its origin, history and structure). Moscow: Publishing house of foreign countries literature, 1960. 485 p.
5. Dinnik A. N., Morgaevsky A. B., Savin G. N. *Trudy soveshchaniya po upravleniyu gornym davleniyem* (Proceedings of the meeting on rock pressure management). Moscow: Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, 1938, pp. 7–55.
6. Erzhanov Zh. S., Aitaliev Sh. M., Masanov Zh. K. *Seysmonapryazhennoye sostoyaniye podzemnykh sooruzheniy v anizotropnom sloistom massive* (Seismic stress state of underground structures in an anisotropic layered massif). Alma-Ata: Science, 1980. 211 p.
7. Zhumabaev B. *Raspredeleniye napryazheniy v massivah porod s goristym relyefom* (Distribution of stresses in rock masses with mountainous terrain). Frunze: Ilim, 1988. 190 p.
8. Zhumabaev B., Botokanova B. A. *Yestestvennyye i tehicheskiye nauki* (Natural and Technical Sciences), 2018, no. 8, pp. 235–243.
9. Kazikaev D. M. *Geomekhanicheskiye protsessy pri sovместnoy i povtornoй razrabotke rud* (Geomechanical processes in the joint and re-development of ores). Moscow: Nedra, 1981. 288 p.

10. Kiryanov D. *MATCAD № 14* (MATCAD No. 14). St. Petersburg: BVH-Petersburg, 2007. 682 p.
11. Kropotkin P. N., Makeev V. M. *Sovremennaya tektonicheskaya aktivnost zemli i seysmichnost* (Modern tectonic activity of the earth and seismicity). Moscow: Nauka, 1987, pp. 192–200.
12. Krupennikov G. A., Filatov N. A., Amusin B. Z., Barkovsky V. M. *Raspredeleniye napryazheniy v porodnykh massivah* (Stress distribution in rock masses). Moscow: Nedra, 1972. 144 p.
13. Kutepov V. M. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 4. Geologiya* (Bulletin of the Moscow University. Series 4. Geology), 1966, no. 6, pp. 71–76.
14. Muskhelishvili N. I. *Nekotoryye osnovnyye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* (Some basic tasks of the mathematical theory of elasticity). Moscow: Nauka, 1966. 707 p.
15. *Napryazhennoye sostoyaniye zemnoy kory (po izmereniyam v massivah gornykh porod)* (The stress state of the earth's crust (as measured in rock masses)) / ed. P. N. Kropotkin. Moscow: Nauka, 1973. 185 p.
16. Savin G. N. *Raspredeleniye napryazheniy okolo otverstiy* (The distribution of stress near the holes). Kiev: Naukova Dumka, 1968. 887 p.
17. Hast N. *The measurements of rock pressure in mines* (The measurements of rock pressure in mines). Stockholm, 1958. 183 p.
18. Hast N. *Engineering Geology* (Engineering Geology), 1967, vol. 2, no. 1, pp. 5–17.

Коротко об авторах

Жумабаев Бейшенбек, д-р техн. наук, профессор кафедры механики, Кыргызско-Российский Славянский университет им. Б. Н. Ельцина, г. Бишкек, Кыргызстан. Область научных интересов: науки о Земле, горные науки
zhumabaev.beyshebenek@mail.ru

Жамангапова Айнура Кыдыраалиевна, ст. преподаватель кафедры горного гидротехнического строительства, Кыргызский национальный аграрный университет (КНАУ) им. К. И. Скрябина, г. Бишкек, Кыргызстан. Область научных интересов: науки о Земле, горные науки
ainura-20.69@mail.ru

Briefly about the authors

Beyshebenek Zhumabaev, doctor of technical sciences, professor. Mechanics department. Kyrgyz-Russian Slavic University named after B. Yeltsin. Bishkek, Kyrgyzstan. Sphere of scientific interests: Earth science, mining

Ainura Zhamangapova, senior lecturer, Mining Hydrotechnical Construction department, Kyrgyz National Agrarian University (KNAU) named after K. I. Scryabin, Bishkek, Kyrgyzstan. Sphere of scientific interests: Earth science, mining

Образец цитирования

Жумабаев Б., Жамангапова А. К. Напряженное состояние массивов вокруг очистной камеры с прямоугольным сечением (отношение сторон = 5:1) // Вестник Забайкальского государственного университета. 2020. Т. 26, № 2. С. 23–31. DOI: 10.21209/2227-9245-2020-26-2-23-31

Zhumabaev B., Zhamangapova A. Stressed State of Massifies Around Cleaning Camera with Rectangular Section (Relation of the Parties = 5:1) // Transbaikal State University Journal, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 23–31. DOI: 10.21209/2227-9245-2020-26-2-23-31.

Статья поступила в редакцию: 13.11.2019 г.
Статья принята к публикации: 04.02.2020 г.