

УДК 550.34

## О МЕТОДЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЛОКАЛЬНЫХ ФАЗОВЫХ СКОРОСТЕЙ И АМПЛИТУД ПЕРВОЙ МОДЫ ВОЛНЫ SH В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ СЕЙСМИКИ

© 2002 г. Л. С. Загорский

Представлено академиком Е.И. Шемякиным 19.04.2002 г.

Поступило 15.02.2002 г.

Волны SH широко применяются при поверхностной, шахтной и нефтегазовой сейсморазведке для определения строения массива горных пород. Предлагается метод вычисления амплитуд первой моды волны SH, в котором использованы результаты сейсмической томографии (локальные дисперсионные кривые фазовых скоростей и скорости поперечных волн на трех уровнях по высоте пласта) и результаты сейсмодпросвечивания (фазовые скорости, скорость поперечной волны на расстоянии одного шага от оси пласта). Нулевое приближение при нахождении амплитуды первой моды определяется по результатам сейсмодпросвечивания.

В работе [1] содержится обоснование принципа конечной области, который позволяет провести линеаризацию обратной задачи. Этим принципом воспользовались в работе [2] при решении обратной задачи в случае, когда в нулевом приближении скорость есть величина постоянная. Разработанные в [3, 4] методы решения обратных задач Штурма–Лиувилля, к которым после разделения переменных в волновом уравнении сводится решение одномерной обратной задачи, позволили в [5, 6] определить спектральную матрицу-функцию уравнения Штурма–Лиувилля для волн SH. В случае же трехмерной обратной задачи в [5, 6] использована известная в геофизике концепция локальных дисперсионных кривых и амплитуд. При этом в [5, 6] предложена следующая последовательность операций:

- проведение полосовой фильтрации;
- определение методом сейсмической томографии амплитуд и локальных дисперсионных кривых групповой скорости волн SH;
- переход от групповых к локальным фазовым скоростям.

Использование головных волн и метода сейсмической томографии позволяет найти в пространственно-временной области скорости поперечных волн на границе пласт–кровля и пласт–почва. Идея предлагаемого метода определения амплитуд интерференционных волн SH заключается в использовании результатов лучевой сейсмической томографии, описание основных алгоритмов которой приведено в [7, 8] в качестве нулевого приближения к исходным данным для решения задачи и последующего нахождения амплитуд.

В качестве исходных данных при решении одномерной обратной задачи возьмем результаты сейсмодпросвечивания пласта: оценки  $A_1$  – амплитуд первой моды,  $\lambda_1$  – собственные значения и  $v_s(h)$  – скорость поперечной волны на расстоянии одного шага от оси пласта, а в качестве исходных данных для решения трехмерной задачи – следующие результаты сейсмической томографии:  $\tilde{\lambda}_1$  – собственные значения и  $v_s(z_j)$  – скорость поперечной волны на трех уровнях по нормали к пласту.

Итак, первое уравнение для волн SH (одномерная обратная задача) имеет вид в цилиндрических координатах

$$\mu_0(z) \left[ \frac{\partial^2 U_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_0}{\partial r} - \frac{U_0}{r^2} \right] + \mu_0(z) \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2} + \frac{\partial \mu_0}{\partial z} \frac{\partial U_0}{\partial z} = \rho_0(z) \frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2} + f, \quad (1)$$

где  $\mu_0(z)$  – модуль сдвига;  $\rho_0(z)$  – плотность.

Второе уравнение для поправок (трехмерная обратная задача):

$$\mu_0(z) \left[ \frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial r} - \frac{U_1}{r^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} \right] + \mu_1(z, r) \left[ \frac{\partial^2 U_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_0}{\partial r} - \frac{U_0}{r^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2} \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \mu_1(z, r) \left[ \frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial r} - \frac{U_1}{r^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} \right] + \\
 & + \frac{\partial \mu_1}{\partial z} \frac{\partial U_0}{\partial z} + \left( \frac{\partial \mu_1}{\partial z} + \frac{\partial \mu_0}{\partial z} \right) \frac{\partial U_1}{\partial z} = \\
 & = \rho_0(z) \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + \rho_1(z, r) \frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2} + \rho_1(z, r) \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}, \quad (2)
 \end{aligned}$$

где

$$U_1(z, r, t) = U(z, r, t) - U_0(z)U_0(r)U_0(t), \quad (3)$$

$$\mu_1(z, r) = \mu(z, r) - \mu_0(z). \quad (4)$$

Начальные условия:

$$\begin{aligned}
 f &= \bar{f}(z, r, t) + U_0(r, z)\delta'(t) + U_1(r, z)\delta(t), \\
 \bar{f} &= 0, \quad t < 0.
 \end{aligned} \quad (5)$$

Граничные условия: шахтная сейсмозащита

$$\begin{aligned}
 U|_{z=z_i-\varepsilon} &= U|_{z=z_i+\varepsilon}, \\
 \mu(z) \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=z_i-\varepsilon} &= \mu(z) \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=z_i+\varepsilon}; \quad (6)
 \end{aligned}$$

поверхностная сейсмозащита

$$\mu(z) \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0. \quad (7)$$

Иначе, пренебрегая членами  $o(\mu_1)$  и  $o(\rho_1)$  во втором уравнении, получим

$$\begin{aligned}
 & \mu_0(z) \left[ \frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial r} - \frac{U_1}{r^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} \right] + \\
 & + \mu_1(z, r) \left[ \frac{\partial^2 U_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_0}{\partial r} - \frac{U_0}{r^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2} \right] + \\
 & + \frac{\partial \mu_1}{\partial z} \frac{\partial U_0}{\partial z} + \frac{\partial \mu_0}{\partial z} \frac{\partial U_1}{\partial z} = \rho_0(z) \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + \rho_1(z, r) \frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Функция Грина первого уравнения на больших расстояниях от источника [5, 6], где составляющие, зависящие от координаты  $z$ , получены с учетом работы [4], имеет вид

$$\begin{aligned}
 G(z_1, z_2, r, \varphi, t) &= \\
 &= 2i \sum_{k=1}^N \int_0^\infty \frac{1}{m_k^\pm} \Psi_\pm(z_1, \lambda_k) \Psi_\mp(z_2, \lambda_k) \times \\
 & \times J_1(K_k r) E^{-i\omega t} \frac{\partial \omega}{2\pi} + O\left(\frac{1}{r}\right), \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$\Psi^\pm(z_1, \lambda) = \sqrt{\frac{P(z_1, \lambda)}{P(\lambda)}} \exp\left\{ \pm i \sqrt{R(\lambda)} \int_0^{z_1} \frac{\partial u}{P(u, \lambda)} \right\}, \quad (10)$$

$$\frac{1}{m_k^\pm} = A_k, \quad \sqrt{R(\lambda_k)} = \frac{P(\lambda_k)}{A_k};$$

$A_k$  – амплитуда нормальной волны,  $\lambda_k = \frac{\omega^2}{V_s^2(0)} - k^2 -$

собственное значение;  $P(z_1, \lambda) = \prod_{k=1}^N (\lambda - \xi_k(z_1))$ ,

$R(\lambda) = \lambda \prod_{K=1}^N (\lambda - \alpha_K)(\lambda - \beta_K)$  – многочлены, введенные Б.М. Левитаном;  $\alpha_K, \beta_K$  – границы лакуны в спектре. Функция Грина второго уравнения на больших расстояниях от источника выглядит так [5, 6]:

$$\begin{aligned}
 G(z_1, z_2, r, \varphi, t) &= \\
 &= 2i \sum_{k=1}^N \int_0^\infty \frac{1}{\tilde{m}_k^\pm} \Psi_\pm(z_1, \tilde{\lambda}_k) \Psi_\pm(z_2, \tilde{\lambda}_k) \times \\
 & \times J_1(\tilde{K}_k r) E^{-i\omega t} \frac{\partial \omega}{2\pi} + O\left(\frac{1}{r}\right). \quad (11)
 \end{aligned}$$

Для монохроматических волн SH первое уравнение:

$$\begin{aligned}
 & \mu_0(z) \left[ \frac{\partial^2 U_0(z, r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_0(z, r)}{\partial r} - \frac{U_0(z, r)}{r^2} \right] + \\
 & + \mu_0(z) \frac{\partial^2 U_0(z, r)}{\partial z^2} + \frac{\partial \mu_0}{\partial z} \frac{\partial U_0(z, r)}{\partial z} + \\
 & + U_0(z, r) \rho_0(z) \omega^2 = F(\omega, z, r), \quad (12)
 \end{aligned}$$

где

$$f = \int_0^\infty F(\omega, z, r) E^{-i\omega t} \frac{\partial \omega}{2\pi}.$$

Подстановка  $U_0(z, r) = V_0(z, r) \sqrt{\frac{\mu_0(0)}{\mu_0(z)}}$  [9, 10]

приводит к уравнению

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{\partial^2 V_0(z, r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_0(z, r)}{\partial r} - \frac{V_0(z, r)}{r^2} \right] + \frac{\partial^2 V_0(z, r)}{\partial z^2} + \\
 & + q(z) V_0(z, r) = \frac{F(\omega, z, r)}{\mu_0(z)} \sqrt{\frac{\mu_0(z)}{\mu_0(0)}}, \quad (13)
 \end{aligned}$$

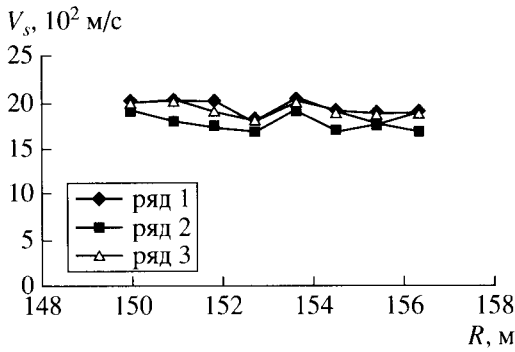


Рис. 1. Скорости поперечных волн на уровнях  $-0.29$ ,  $0$ ,  $0.29$  м.

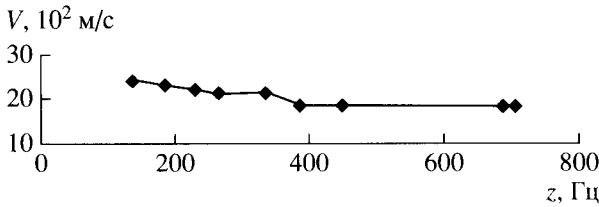


Рис. 2. Дисперсия фазовой скорости моды 1 волны SH.

где

$$q(z) = \frac{\rho_0(z)}{\mu(z)} \omega^2 - \frac{(\sqrt{\mu(z)})''}{\sqrt{\mu(z)}}$$

При этом краевое условие (например, для полупространства) будет таким [9]:

$$\left\{ \mu_0(z) \frac{\partial V_0}{\partial z} - \frac{1}{2} V_0 \mu_0'(z) \right\}_{z=0} = 0.$$

Для поправок второе уравнение (трехмерная обратная задача):

$$\begin{aligned} & \mu_0(z) \left[ \frac{\partial^2 U_1(z, r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_1(z, r)}{\partial r} - \right. \\ & \left. - \frac{U_1(z, r)}{r^2} + \frac{\partial^2 U_1(z, r)}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial \mu_0}{\partial z} \frac{\partial U_1(z, r)}{\partial z} + \\ & + U_1(z, r) \rho_0(z) \omega^2 = -\mu_1(z, r) \left[ \frac{\partial^2 U_0(z, r)}{\partial r^2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial U_0(z, r)}{\partial r} - \frac{U_0(z, r)}{r^2} + \frac{\partial^2 U_0(z, r)}{\partial z^2} \right] - \\ & - \frac{\partial \mu_1(z, r)}{\partial z} \frac{\partial U_0(z, r)}{\partial z} - U_0(z, r) \rho_1(z, r) \omega^2. \quad (14) \end{aligned}$$

Предположим, что можно распределение амплитуд и волновых чисел аппроксимировать либо аналитической функцией, либо функцией с непрерывной второй производной. Случай контакта двух четвертьпространств с кусочно-постоянными характеристиками рассматривался в работах [11, 12]. Подход, предлагаемый в настоящей работе для первой моды волны SH, позволяет резко сократить число условий на границах при распространении сейсмической волны как по оси  $r$ , так и по оси  $z$ .

Таким образом, суть численной схемы решения задачи сводится к следующему:

- по известным скорости поперечной волны на расстоянии одного шага от оси пласта  $V_s(h)$  и по собственному значению  $\lambda_1$  находим амплитуду  $A_1$ , а также нижнюю  $\alpha_1$  и верхнюю  $\beta_1$  границу 1 лакуны в спектре [5, 6];

- строим вертикальный сейсмический разрез;

- определяем  $\mu_1(0, r_i)$ ,  $\mu_1(h, r_i)$ ,  $\mu_1(-h, r_i)$  методом сейсмической томографии, располагая сейсмоприемники на трех уровнях по высоте пласта;

- находим поправки к решению из системы линейных алгебраических уравнений (15);

- находим амплитуду из уравнения (17);

- по найденным  $V_s(h)$ ,  $\tilde{A}_1$ ,  $\tilde{\lambda}_1$ ,  $\tilde{\alpha}_1$ ,  $\tilde{\beta}_1$  определяем вертикальный сейсмический разрез по методике работ [5, 6].

После представления производных в виде конечных разностей поправки находятся из следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \mu_0(z_j) \left[ \frac{U_1(z_j, r_{i+1}) - 2U_1(z_j, r_i) + U_1(z_j, r_{i-1}))}{h_r^2} + \right. \\ & + \frac{1}{r_i} \frac{U_1(z_j, r_{i+1}) - U_1(z_j, r_{i-1}))}{2h_r} - \frac{U_1(z_j, r_i)}{r_i^2} + \\ & + \left. \frac{U_1(z_1, r_i) - 2U_1(z_2, r_i) + U_1(z_3, r_i)}{h^2} \right] + \\ & + \delta(j-1) \frac{-3\mu_0(z_1) + 4\mu_0(z_2) - \mu_0(z_3)}{2h} \times \\ & \times \frac{-3U_1(z_1, r_i) + 4U_1(z_2, r_i) - U_1(z_3, r_i)}{2h} + \\ & + \delta(j-2) \frac{\mu_0(z_3) - \mu_0(z_1)}{2h} \frac{U_1(z_3, r_i) - U_1(z_1, r_i)}{2h} + \\ & + \delta(j-3) \frac{3\mu_0(z_3) - 4\mu_0(z_2) + \mu_0(z_1)}{2h} \times \\ & \times \frac{3U_1(z_3, r_i) - 4U_1(z_2, r_i) + U_1(z_1, r_i)}{2h} + \\ & + U_1(z_j, r_i) \rho_0(z_j) \omega^2 = f, \quad (15) \end{aligned}$$

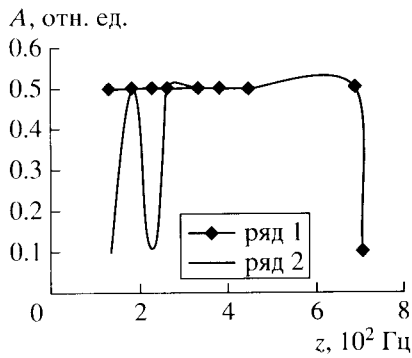


Рис. 3. Сравнение амплитуд.

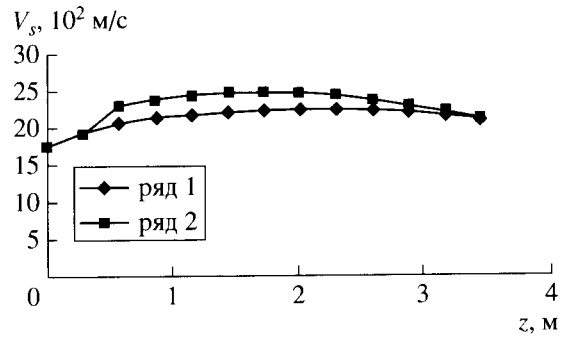


Рис. 4. Сравнение вертикальных сейсмических разрезов выше оси пласта. Удаление 151.8 м.

где  $f$  вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}
 f = & -\mu_1(z_j, r_i) \times \\
 & \times \left[ \frac{U_0(z_j, r_{i+1}) - 2U_0(z_j, r_i) + U_0(z_j, r_{i-1}))}{h_r^2} + \right. \\
 & + \frac{1}{r_i} \frac{U_0(z_j, r_{i+1}) - U_0(z_j, r_{i-1}))}{2h_r} - \frac{U_0(z_j, r_i)}{r_i^2} + \\
 & \left. + \frac{U_0(z_1, r_i) - 2U_0(z_2, r_i) + U_0(z_3, r_i)}{h^2} \right] - \\
 - \delta(j-1) & \frac{-3\mu_1(z_1, r_i) + 4\mu_1(z_2, r_i) - \mu_1(z_3, r_i)}{2h} \times \\
 & \times \frac{-3U_0(z_1, r_i) + 4U_0(z_2, r_i) - U_0(z_3, r_i)}{2h} - \\
 - \delta(j-2) & \frac{\mu_1(z_3, r_i) - \mu_1(z_1, r_i)}{2h} \frac{U_0(z_3, r_i) - U_0(z_1, r_i)}{2h} - \\
 - \delta(j-3) & \frac{3\mu_1(z_3, r_i) - 4\mu_1(z_2, r_i) + \mu_1(z_1, r_i)}{2h} \times \\
 & \times \frac{3U_0(z_3, r_i) - 4U_0(z_2, r_i) + U_0(z_1, r_i)}{2h} - \\
 & - U_0(z_j, r_i) \rho_1(z_j, r_i) \omega^2 + O(h^2) + O(h_r^2). \quad (16)
 \end{aligned}$$

Здесь  $\delta(0) = 1$ , иначе  $\delta(j-l) = 0$ ,  $j, l = 1, 2, 3$ ,  $i = m, m+1, \dots, N-1$ . Краевое условие:  $U_1(z_j, r_N) = 0$ ,  $U_1(z_j, r_{N-1}) = 0$ . Для обеспечения устойчивости вычислений в знаменателях формул (15) и (16)  $h_r = \tilde{h}_r + \varepsilon$ ,  $h = \tilde{h} + \varepsilon_1$ , где  $\varepsilon = O(\|\delta_k\| \cdot \|\delta_r\|)$ ,  $\varepsilon_1 = O(\|\delta_{\lambda_1}\| \cdot \|\delta_z\|)$ , а  $\|\delta_k\|$ ,  $\|\delta_r\|$ ,  $\|\delta_{\lambda_1}\|$ ,  $\|\delta_z\|$  – нормы погрешности определения  $k, r, \lambda_1, z$ . Решать систему линейных алгебраических уравнений (15) удобно методом сопряженных градиентов [13] или прогонки.

Сейсмоприемники следует располагать на трех уровнях: ось пласта, границы пласт–кровля и пласт–почва. В результате сеймопросвечивания и томографического обращения в этом случае будут полностью определены составляющие формулы (16). Таким образом, для шахтной сейсморазведки при доминировании первой моды волны SH на больших расстояниях от источника поправки находятся явно.

Уравнение для определения амплитуд выглядит так:

$$G(z_1, z_2, r, \lambda_1) + (G * f)(z_1, r, \lambda_1^*) = G(z_1, z_2, r, \tilde{\lambda}_1), \quad z_1 \in [-h, h], \quad (17)$$

где  $G * f = U_1$  находится из уравнения (15), фазовая часть функции Грина в правой части определена локальными дисперсионными кривыми. По предлагаемому методу были проведены расчеты для модельного примера (рис. 1, 2). Результаты представлены на рис. 3, 4. Ряд 1 – расчет по программе автора “D3” без учета, а ряд 2 – с учетом рассеяния в смежных областях. Поскольку дисперсионная кривая соответствует пласту мощностью около 1 м, можно получить более точные результаты.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кабанихин С.И. Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. Новосибирск: Наука, 1988. С. 131–143.
2. Алексеев А.С., Глинский Б.М., Ковалевский В.В., Хайретдинов М.С. В сб.: Науки о Земле: Современные проблемы сейсмологии. М.: Вуз. кн., 2001. С. 5–24.
3. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984. 240 с.
4. Хасанов А.Б. // ДАН. 1991. Т. 318. № 5. С. 1095–1098.

5. *Загорский Л.С.* // ДАН. 1998. Т. 358. № 5. С. 672–674.
6. *Загорский Л.С.* Спектральные методы определения строения горного массива. М.: Изд. дом “Гральный”, 2001. 80 с.
7. Сейсмическая томография / Под ред. Г. Нолета. М.: Мир, 1990. 416 с.
8. *Романов М.Е., Колонин А.Г.* Криволинейно-лучевая кинематическая и амплитудная сейсмотомография. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1997. 40 с.
9. *Маркушевич В.М., Резников Е.Л.* // Вычисл. сейсмология. 1979. В. 12. С. 59–69.
10. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. С. 23–24.
11. *Итс Е.Н., Яновская Т.Б.* // Вычисл. сейсмология. 1979. В. 12. С. 86–92.
12. *Букчин Б.Г.* // Вычисл. сейсмология. 1979. В. 12. С. 80–85.
13. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 232 с.