

УДК 519.63:532.546

## ФИЛЬТРАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ПРИТОКА ЖИДКОСТИ К ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СКВАЖИНЕ С МНОГОСТАДИЙНЫМ ГИДРАВЛИЧЕСКИМ РАЗРЫВОМ ПЛАСТА

*А.Б. Мазо, К.А. Поташев, М.Р. Хамидуллин*

### Аннотация

В статье разработана трехмерная математическая и численная конечнообъемная модель однофазной фильтрации флюида вблизи горизонтальной скважины с трансверсальными трещинами многостадийного гидравлического разрыва пласта (МГРП). Численно исследовано влияние параметров трещин и скважины на ее продуктивность.

Предложена методика приближенной оценки эффективности МГРП, основанная на учете различных видов симметрии фильтрационного течения в отдельных зонах при скважинной области. Упрощенная задача сведена к одномерному уравнению и набору аналитических формул; приближенное решение уточнялось с помощью результатов трехмерного численного моделирования. Упрощенная методика применима как для оперативной оценки эффективности МГРП, так и для использования в фильтрационных моделях разработки нефтяных пластов.

**Ключевые слова:** горизонтальная скважина, многостадийный гидравлический разрыв пласта, однофазная фильтрация.

### Введение

При разработке залежей нефти традиционно используют вертикальные нагнетательные и добывающие скважины. Бурение горизонтальных скважин (ГС) позволяет повысить нефтеотдачу пластов, особенно на поздней стадии их разработки. Другим способом увеличения добычи нефти является гидравлический разрыв пласта (ГРП), который наиболее эффективен для коллекторов низкой проницаемости, насыщенных высоковязкой нефтью. Обычно ГРП проводят на вертикальных скважинах, однако в последнее время получил распространение новый вид гидроразрыва пласта – многостадийный ГРП (МГРП), при котором несколько трещин располагаются в ортогональных к оси горизонтальной скважины плоскостях (трансверсальные трещины).

Одновременно с совершенствованием технологий бурения ГС с МГРП и расширением их применения в промысловой практике развиваются и теоретические исследования сложных фильтрационных процессов в системе «пласт – трещины гидроразрыва – скважина». При этом степень детализации математического описания притока флюида к ГС с МГРП может быть разной и определяется назначением модели.

В универсальных пакетах программ для моделирования ГРП применяются упрощенные подходы. Например, в программном комплексе tNavigator трещины ГРП заменяются частью скважины с сетью дополнительных «виртуальных» перфораций с индивидуальными параметрами, отражающими локальные свойства трещины. В коммерческих программах Schlumberger Eclipse и ROXAR Tempest

MORE скважины с проведенным ГРП моделируются с использованием эквивалентного скин-фактора. Для его определения обычно пользуются корреляциями между продуктивностью скважин с трещиной ГРП и параметрами гидроразрыва. Для трещин бесконечной проницаемости такие результаты были получены методом электрогидродинамической аналогии [1, 2]. В статье [1] решена трехмерная задача в пласте, имеющем форму параллелепипеда и содержащем скважину и две трещины. Пласт считался однородным и изотропным, а трещины имели высоту, равную высоте пласта. В работе [2] для оценки скин-эффекта и для расчета поля давления использовались функции Грина. Пласт считался бесконечным, вскрытым одной скважиной с вертикальной трещиной.

Влияние проницаемости трещины на продуктивность скважины было изучено в [3], где введено понятие эффективного радиуса для скважины с ГРП.

Первой упрощенной моделью стационарного притока к одиночной трансверсальной трещине ГРП, по-видимому, является модель Швидлера [4], в которой аналитическое решение получено в предположении о бесконечной проницаемости трещины и в отсутствие притока жидкости к стволу скважины. В работе Каневской [5] предложен метод расчета притока к трансверсальной трещине ГРП, в котором численное решение для фильтрационного течения в пласте сопрягается с приближенным аналитическим решением для трещины конечной проводимости.

Ряд исследований посвящен оценке влияния ориентации трещины относительно ствола скважины на ее продуктивность. Так, в работе [6] исследуется влияние продольных и трансверсальных трещин на общую добычу ГС. Показано, что трансверсальные трещины на плохопроницаемых пластах гораздо эффективнее, чем трещины, направленные вдоль оси скважины. При этом коллектор с трещинами описывается моделью двойной пористости. Для однородного изотропного пласта девять трансверсальных трещин дали на 12% больший прирост продуктивности ГС, чем одна продольная трещина с той же поверхностью контакта. Авторы утверждают, что продуктивность скважины при двух вариантах направления трещин ГРП одинакова, если продольная трещина имеет вдвое большую площадь контакта, чем несколько трансверсальных.

В [7] оценена продуктивность горизонтальной скважины с несколькими различными трансверсальными трещинами ГРП. Гидродинамическая связь между трещиной и пластом моделируется с помощью скин-фактора. В [8] представлена методика оценки дебита горизонтальной скважины, пересеченной естественными трещинами. Авторы этой статьи пришли к выводу, что наибольший эффект с точки зрения повышения продуктивности дают ортогональные к оси скважины трещины. Предложенная методика позволяет моделировать приток флюида из пласта с естественными трещинами, для каждой из которых задаются ширина раскрытия и ориентация. Утверждается, что данный метод может быть использован и в случае многостадийного гидроразрыва пласта с трансверсальными трещинами.

Прямому численному моделированию притока флюида (или газа) к горизонтальной скважине с многостадийным ГРП посвящены работы [9–11]. В [9] автор исследовал влияние многостадийного гидроразрыва на продуктивность горизонтальной скважины при различной проницаемости и пористости пласта. В [10] кроме влияния проницаемости исследовано также влияние геометрии трещин и их взаимное расположение. Авторы определили оптимальную с экономической точки зрения полудлину трещин при различной проницаемости пласта и трещин. В [11] представлена математическая модель притока жидкости к горизонтальной скважине с МГРП в пласте, имеющем форму параллелепипеда. По утверждению авторов эта модель может быть использована для пластов двойной пористости и со сложной геометрией трещин.

Анализ литературы, посвященной моделированию притока флюида к ГС с многостадийным гидроразрывом пласта, показал, что на данный момент существенно развиты два направления: детальный численный расчет и решение упрощенной задачи с целью получения инженерных формул для оценки продуктивности подобных ГС. Однако оба направления имеют недостатки. Детальный численный расчет требует значительных вычислительных ресурсов и не может быть непосредственно проведен с помощью универсальных пакетов при моделировании разработки нефтяного месторождения. Область применения инженерных формул, как правило, ограничена, так как они получены для частных постановок задач при значительных упрощениях.

В настоящей работе развиваются оба направления. Математическая модель формулируется в безразмерных переменных, определяются критерии подобия. На этой основе разработана упрощенная методика и получены оригинальные инженерные формулы для оценки продуктивности ГС с МГРП. Эти формулы содержат адаптивные коэффициенты, которые определяются на основе сравнения с результатами детального численного расчета.

Результат, в отличие от представленных в большинстве публикаций, в описанной выше форме, может быть использован в суперэлементной фильтрационной модели [12] для имитации разработки крупных месторождений.

## 1. Математическая модель и расчет притока флюида к ГС

Рассмотрим задачу о притоке однофазной жидкости к ГС, простимулированной многостадийный гидравлическим разрывом пласта с трансверсальными трещинами.

Известно [13–15], что при залегании пласта на глубинах больше 1 км создание импульса высокого давления при проведении ГРП обеспечивает вертикальную ориентацию трещины ГРП в направлении оси максимального напряжения породы, при этом обычно трещина разрывает пласт от кровли до подошвы.

Для того чтобы трещина не смыкалась после сброса давления, в нее закачивают расклинивающий материал – проппант, который можно рассматривать как среду с проницаемостью, намного превосходящей проницаемость коллектора. Именно это обеспечивает передачу депрессии с устья горизонтальной скважины к трещинам и, соответственно, повышает дебит скважины с МГРП.

В соответствии с выше сказанным примем следующую схему горизонтальной скважины с МГРП (рис. 1).

Введем декартову систему координат  $xuz$  с вертикальной осью  $z$  и осью  $y$ , направленной вдоль ствола скважины 1 радиуса  $r_w$  и длины  $L$ . Начало отсчета совместим с началом перфорированного участка скважины. Кровля 2 и подошва 3 пласта непроницаемы, толщина пласта постоянна и равна  $2H$ . Абсолютную проницаемость коллектора обозначим через  $k = k(x, y, z)$ , а удельную (на единицу толщины пласта) гидропроводность – через  $\sigma = k/\mu$ , где  $\mu$  – вязкость флюида. Контур питания 4 в плоскости  $xu$  представим овалом (рис. 1,  $\vartheta$ ), размеры которого определяются системой разработки залежи (сеткой скважин). Обычно контур 4 удален от ГС на расстояние  $l \approx 100$  м. Стенки 5 трещин представим парой прямоугольных плоскостей размерами  $2H \times 2h$  (см. рис. 1) с расстоянием между ними  $2\delta$  (раскрытие трещины). Трещины МГРП имеют проницаемость  $k_f$  и расположены на расстоянии  $2d$  друг от друга (рис. 1). Удельную гидропроводность трещины обозначим через  $\sigma_f = k_f/\mu$ .

При построении математической модели будем учитывать соотношения размеров

$$\delta \leq r_w = 10^{-1} \text{ м} \ll H \approx 10 \text{ м} \ll l \approx 10^2 \text{ м} \ll L \approx 10^3 \text{ м}.$$

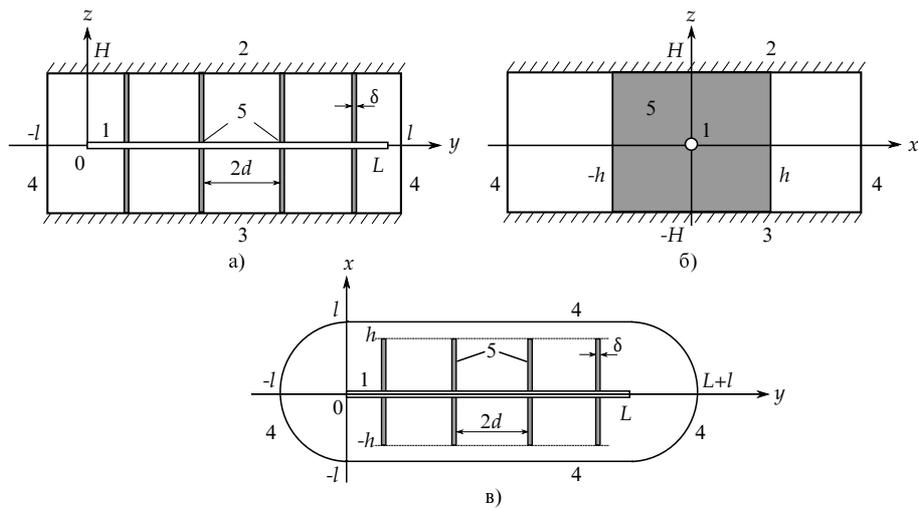


Рис. 1. Схема ГС с МГРП: а) вид сбоку, б) вид с торца, в) вид сверху

и фильтрационных свойств

$$k/k_f \ll 1.$$

Кроме того, примем следующие упрощения: однофазное фильтрационное течение стационарно и определяется разностью давления  $p_w$  на скважине и пластового давления  $p_l$  на внешнем контуре; капиллярные и гравитационные силы не учитываются; падением давления  $p_w$  на скважине можно пренебречь. При этих ограничениях математическая модель фильтрации сводится к уравнениям для давления  $p$  в коллекторе и  $p_f$  в трещинах гидроразрыва:

$$-\operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad u = -\sigma \operatorname{grad} p; \quad (1)$$

$$-\operatorname{div} \vec{u}_f = 0, \quad u_f = -\sigma_f \operatorname{grad} p_f. \quad (2)$$

Здесь  $\vec{u}$ ,  $\vec{u}_f$  – скорости фильтрации в пласте и трещинах соответственно. Граничные условия для уравнений (1), (2) таковы: кровля 2 и подошва 3, а также торцы скважины 1 и трещин 5 непроницаемы:

$$u_n = -\sigma \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad u_{fn} = -\sigma_f \frac{\partial p_f}{\partial n} = 0; \quad (3)$$

на боковых поверхностях трещин задается равенство давлений и нормальных компонент скорости:

$$p = p_f, \quad \sigma \frac{\partial p}{\partial y} = \sigma_f \frac{\partial p_f}{\partial y}. \quad (4)$$

Аналогичные условия сопряжения ставятся и на боковой поверхности  $r = \sqrt{z^2 + x^2} = r_w$  ствола скважины: на ее перфорированных участках задается  $p_f = p_w$ ,  $p = p_w$ , а на неперфорированных – условие изоляции (3).

Для каждой трещины ГРП удобно ввести локальную поперечную координату  $\eta = y - y_k$ ,  $-\delta < \eta < \delta$ ,  $y_k$  – координата оси  $k$ -й трещины, и среднее по раскрытию трещины давление

$$\langle p_f \rangle(x, z) = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} p_f d\eta.$$

Интегрируя уравнение (2) по  $y$  с учетом граничных условий (4), получим двумерное уравнение для  $\langle p_f \rangle$ :

$$\nabla (\sigma_f \nabla \langle p_f \rangle) + \frac{\sigma}{2\delta} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=y_k-\delta}^{y=y_k+\delta} = 0, \quad (5)$$

в котором второй член определяет приток флюида из пласта к трещине. В уравнении (5)  $\nabla$  – оператор Гамильтона в координатах  $x, z$ . Граничные условия для (5) следующие:  $\langle p_f \rangle = p_w$  на скважине и условия гидроизоляции при  $x = \pm h$ ,  $z = \pm H$ .

Система дифференциальных уравнений (1), (5) с условием сопряжения (4) и указанными выше граничными условиями однозначно определяют трехмерное поле давления  $p$  в коллекторе и комплект плоских полей давления  $\langle p_f \rangle$  в трещинах ГРП при заданных значениях пластового давления  $p_l$ , давления  $p_w$  в скважине, гидропроводностей  $\sigma$  и  $\sigma_f$ . Для решения задачи необходимо также задать следующие параметры: радиус  $r_w$  и длину  $L$  скважины, шаг  $2d$ , раскрытие  $2\delta$  и размер  $2h$  трещин ГРП, размеры  $l$  и  $H$ , определяющие внешний контур.

После того как задача для давления решена, можно подсчитать поле скорости  $\vec{u}$  по закону Дарси (1) и найти дебит  $q$  скважины с МГРП, который будет складываться из расхода через боковую поверхность  $\gamma$  ствола скважины

$$q_w = \int_{\gamma} u_n d\gamma = 2\pi r_w \int_0^L u_n|_{r=r_w} dy \quad (6)$$

и расхода, поступающего через трещины ГРП,

$$q_f = 4 \sum_k \int_0^H \int_0^h (u_y|_{y=y_k+\delta} - u_y|_{y=y_k-\delta}) dx dy. \quad (7)$$

Чтобы сократить число определяющих параметров, приведем задачу для давления к безразмерному виду, нормируя все линейные размеры на полутолщину  $H$  пласта и введя безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{p - p_w}{p_l - p_w}; & \bar{\sigma} &= \frac{\sigma}{\sigma_0}; & \bar{u} &= \frac{u}{u_0}, & u_0 &= \sigma_0 \frac{p_l - p_w}{H}, \\ \sigma_0 &= \frac{k_0}{\mu}; & \bar{q} &= \frac{q}{q_0}, & q_0 &= u_0 H^2. \end{aligned} \quad (8)$$

В формулах (8)  $k_0$  – характерное значение проницаемости коллектора. В новых переменных уравнение (1) и условия (3), (4) сохраняют свою форму; на внешней границе области ставится условие  $p = 1$ , а на поверхности  $\gamma$  скважины –  $p = 0$ . Уравнение (5) при постоянном  $\sigma_f$  примет вид (черта над безразмерными величинами и угловые скобки для средних опущены для сокращения записи)

$$\Delta p_f + \frac{\sigma}{2M} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y_k-\delta}^{y_k+\delta} = 0, \quad M = \frac{k_f \delta}{kH}. \quad (9)$$

Это уравнение определено в прямоугольнике  $|z| < 1$ ,  $|x| < h$  с вырезом  $\gamma$  в центре – окружностью радиуса  $r_w$ . На этой внутренней границе ставится условие Дирихле  $p_f|_{\gamma} = 0$ , а на внешних границах  $z = \pm 1$ ,  $x = \pm h$  задается условие изоляции.

Формулы (6), (7) для подсчета дебита скважины при переходе к безразмерным переменным сохраняют свою форму, лишь в интеграле (7) следует положить  $H = 1$ .

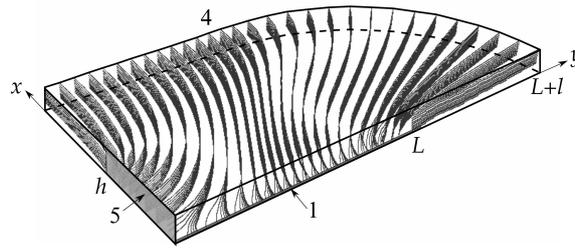


Рис. 2. Линии тока вблизи концевой участка горизонтальной скважины с трещиной ГРП

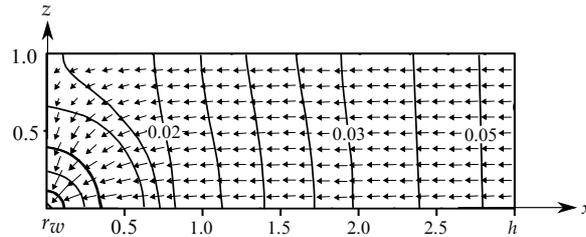


Рис. 3. Распределение давления в трещине ГРП

Безразмерная модель притока флюида к ГС с МГРП определяется следующим набором параметров:

$$r_w, l, L, h, d, M, \sigma, \quad (10)$$

причем для однородного пласта  $\sigma \equiv 1$ ; параметр  $M$  характеризует проводимость трещин. Система уравнений (1), (9) решалась методом конечных объемов на сетке, сгущающейся к скважине. В серии расчетов на сетках разного разрешения установлена сходимость численного решения.

Были проведены многовариантные расчеты с целью выяснить влияние параметров (10) на суммарный дебит  $q$  скважины (6), (7); при этом были фиксированы значения  $r_w = 10^{-2}$ ,  $l = 10$ ,  $\sigma = 1$ ,  $L = 10^2$ , а варьировались параметры  $d$ ,  $h$  и  $M$ , определяющие многостадийный гидроразрыв пласта. Основные результаты численного моделирования представлены на рис. 2–5. В качестве показателя эффективности ГРП использовалось отношение суммарного дебита  $q$  скважины с МГРП к дебиту  $q_*$  той же скважины без гидроразрыва

$$\tilde{q} = q/q_*$$

На рис. 2 изображены линии тока фильтрационного течения в краевом сегменте области расчета. Показана четверть этого сегмента, ограниченная овальным контуром 4, горизонтальными плоскостями симметрии  $z = 0$  и кровлей  $z = 1$ , вертикальной плоскостью симметрии  $x = 0$  и сечением  $y = y_k$ , проходящим через крайнюю трещину ГРП. Хорошо видно, как разделяется приток флюида с контура 4: одна его часть попадает в трещину 5, другая – непосредственно в скважину 1.

На рис. 3 представлены расчетные поля изобар и скорости в трещине ГРП. Характерной особенностью фильтрационного течения в трещине является существенное ускорение течения от периферии к скважине.

На рис. 4 приведены классические номограммы изменения дебита горизонтальной скважины при наличии трещин ГРП с различными свойствами. Слева для одиночной трансверсальной трещины длины  $h = 1$  показана зависимость  $\tilde{q}$  от проводимости трещины  $M$  для скважин разной длины  $L$ . Видно, что рост эффективности  $\tilde{q}(M)$  практически прекращается при  $M > 10^2$ . Семейство кривых  $\tilde{q}(h)$

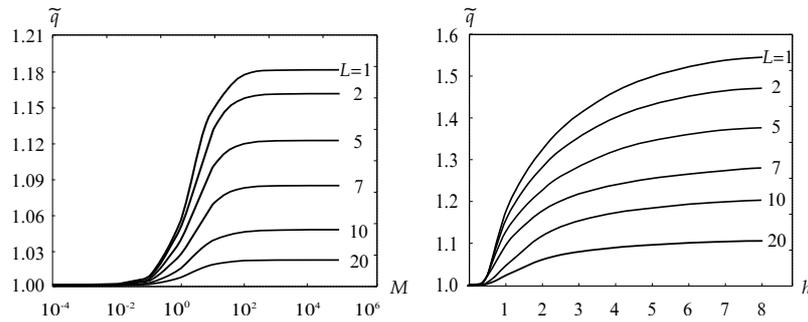


Рис. 4. Номограммы эффективности ГС с единичной трансверсальной трещиной ГРП в зависимости от проводимости трещины  $M$  (слева) и ее длины  $h$  (справа)

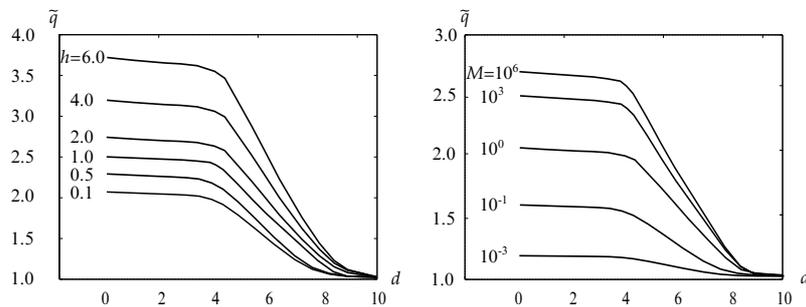


Рис. 5. Номограммы эффективности МГРП при варьировании  $d$  (слева при  $M = 10^3$ , справа при  $h = 1.0$ )

на правой номограмме построено при  $M = 10^3$  и иллюстрирует монотонный рост эффективности с увеличением длины трещины  $h$ ; прирост дебита существенно замедляется при  $h > 4$ .

На рис. 5 показано влияние расстояния  $d$  между соседними трещинами на продуктивность ГС с МГРП при фиксированной длине скважины  $L = 20$ . На левом рисунке представлено семейство кривых  $\tilde{q}(d)$  при фиксированной проводимости трещин  $M = 10^3$  и различных значениях их длины  $h$ ; на правом рисунке изображены номограммы  $\tilde{q}(d)$  для трещин длиной  $h = 1$  при различных значениях их проводимости  $M$ . В обоих случаях при  $d < d_* = 5$  относительный дебит  $\tilde{q}$  практически постоянен, а значит, увеличение числа трещин ГРП за предел  $L/d_*$  не имеет смысла с точки зрения повышения эффективности эксплуатации скважины.

## 2. Упрощенная методика оценки эффективности МГРП

Предложенный в п. 1 метод прямого численного моделирования фильтрационных течений в окрестности ГС с МГРП изложен в однофазном приближении, однако его обобщение на двухфазные нестационарные течения не вызывает принципиальных трудностей [16]. После этого данный подход может с успехом применяться для моделирования разнообразных сценариев притока водонефтяной смеси к одной скважине с многостадийным ГРП. Однако такая численная модель МГРП не может быть встроена в фильтрационную модель разработки крупного месторождения со множеством скважин, поскольку это привело бы к неприемлемому замедлению счета. Весьма затруднительно использование прямого численного моделирования при проектировании и для оперативной оценки эффективности проведения

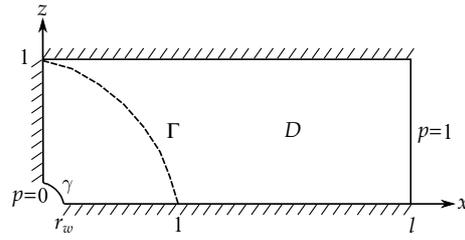


Рис. 6. Область решения задачи о притоке жидкости к горизонтальной скважине

многостадийного ГРП на горизонтальных скважинах. Ниже предлагается упрощенная методика решения задачи, основанная на учете различных видов симметрии фильтрационного течения в окрестности ГС с МГРП. При этом прямое численное моделирование будет использовано для уточнения приближенного решения.

**2.1. Приток к горизонтальной скважине без ГРП.** Рассмотрим сначала задачу о притоке однофазного флюида к ГС без трещин МГРП. Пласт считаем однородным,  $\sigma \equiv 1$ . Пренебрегая падением давления вдоль ствола скважины, задачу можно свести к двумерной в плоскости  $y = y_0 \in (0, L)$ . Отметим, что плоский характер течения нарушается, когда  $y_0$  приближается к концам  $y = 0$  и  $y = L$ ; влияние концевых эффектов будет рассмотрено позже. В силу симметрии течения достаточно рассмотреть  $1/4$  поперечного сечения, показанного на рис. 6. Область фильтрации  $D$  ограничена сверху кровлей пласта, справа – контуром питания, снизу и слева – линиями симметрии и поверхностью скважины  $\gamma$ . Математическая формулировка задачи о стационарном притоке к скважине сводится к задаче для давления, которая в безразмерных переменных имеет вид

$$\Delta p = 0 \quad \text{в } D = [0, l] \times [0, 1] \setminus \gamma, \quad (11)$$

$$\sigma \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad z = 0, \quad z = 1, \quad (12)$$

$$p = 0 \quad \text{при } (x, z) \in \gamma; \quad p = 1 \quad \text{при } x = l. \quad (13)$$

После того как задача (11)–(13) решена, можно подсчитать удельный  $q$  и полный  $Q$  дебиты скважины по формулам

$$q = - \int_{\gamma} \frac{\partial p}{\partial n} d\gamma, \quad Q = \int_0^L q(y) dy.$$

Упрощенная модель (11)–(13) описывает плоскую фильтрацию и пригодна для основной части ствола ГС.

### Приближенное решение задачи о притоке к ГС.

Задача (11)–(13) для однородного пласта ( $\sigma \equiv 1$ ) описывает течение в длинной ( $l \gg 1$ ) полосе единичной ширины, причем на границах  $z = 0$ ,  $z = 1$  заданы условия симметрии, а отличие от плоско-параллельного течения обусловлено только граничным условием Дирихле  $p = 0$  на четверти окружности  $\gamma$  в левом нижнем углу области (см. рис. 6). Это позволяет утверждать, что характер течения будет таков: во всей полосе справа при  $x \geq 1$  течение плоско-параллельное, а в окрестности  $\gamma$  – плоско-радиальное. При этом расход жидкости  $q$  целиком определяется

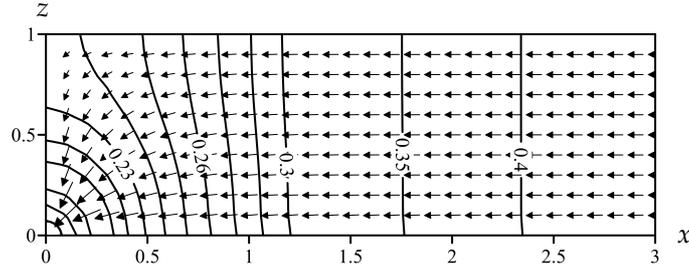


Рис. 7. Расчетное поле давления и поле скорости в прискважинной зоне

плоско-параллельным течением и равен

$$q = \frac{1 - p_\Gamma}{l - 1}, \tag{14}$$

где  $p_\Gamma$  – подлежащее определению давление при  $x = 1$ . Далее предполагается, что на окружности  $\Gamma = \{(x, z) : \sqrt{x^2 + z^2} = 1\}$  давления близко к постоянному  $p_\Gamma$ . Тогда в подобласти, ограниченной окружностями  $\gamma$  и  $\Gamma$  и лучами  $x = 0$  и  $z = 0$ , фильтрация будет плоско-радиальной и описываться одномерной задачей

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dp}{dr} \right) = 0, \quad r_w < r < 1;$$

$$p = 0 \quad \text{при } r = r_w; \quad p = p_\Gamma \quad \text{при } r = 1.$$

Ее решение записывается в виде

$$p(r) = p_\Gamma \frac{\ln(r/r_w)}{\ln(1/r_w)},$$

а скорость притока к скважине  $q$  и её удельный расход можно вычислить по формулам

$$u_n = \left. \frac{dp}{dr} \right|_{r=r_w} = \frac{p_\Gamma}{r_w \ln(1/r_w)}, \quad q = \theta \frac{\pi r_w}{2} u_n = \theta \frac{\pi p_\Gamma}{2 \ln(1/r_w)}. \tag{15}$$

Здесь форм-фактор  $\theta \approx 1$  – поправочный коэффициент, значение которого будет найдено при сопоставлении  $q$  из (15) с «точным» значением расхода, полученным с помощью численного решения задачи (11). Приравняв значения расходов  $q$  из (14) и (15), найдем

$$p_\Gamma = \frac{a}{1 + a}, \quad a = \frac{-2 \ln(r_w)}{(l - 1) \theta \pi}; \quad q = \frac{1}{(l - 1)(1 + a)}. \tag{16}$$

Чтобы определить форм-фактор  $\theta$  в формуле (16), задача (11)–(13) была решена численно. Расчеты подтвердили, что в подобласти  $x > 1$  наблюдается плоско-параллельное течение с постоянной скоростью, а в прискважинной зоне  $x < 1$  характер течения существенно меняется: жидкость устремляется скважине  $\gamma$  с ускорением (см. рис. 7).

При этом давление на дуге единичной окружности  $\Gamma$ , полученное при численном решении задачи, отличается от константы  $p_\Gamma$  в приближенной модели не более чем на 10%; а отклонение форм-фактора  $\theta$  от единицы не превышает 5%.

Плоско-радиальная симметрия фильтрационного течения нарушается вблизи концов ствола скважины, для которых характерным является приток из внешней

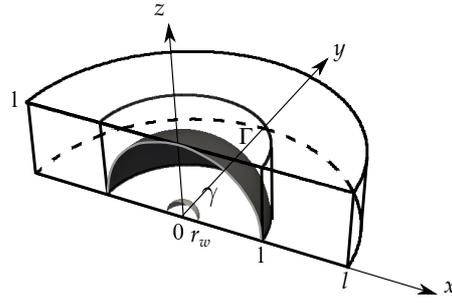


Рис. 8. Схема концевой участка горизонтальной скважины

полусферы, см. рис. 8. Течение жидкости между двумя вертикальными цилиндрическими поверхностями радиусов 1 и  $l$ , соответственно, имеет плоско-радиальный характер. Предполагаем, что давление на внутренней цилиндрической поверхности незначительно отличается от давления на поверхности полусферы такого же радиуса. В области, ограниченной двумя полусферами радиусов  $r_w$  и 1, характер течения подчиняется сферической симметрии и описывается уравнениями

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dp}{dr} \right) = 0, \quad r_w < r < 1;$$

$$p = 0 \quad \text{при } r = r_w; \quad p = p_\Gamma \quad \text{при } r = 1,$$

где  $p_\Gamma$  – подлежащее определению давление на внешнем контуре. Решение данной задачи имеет вид

$$p(r) = p_\Gamma \frac{(r - r_w) 1}{(1 - r_w) r}, \quad q_s = \frac{\pi \theta p_\Gamma}{2(1 - r_w)}. \quad (17)$$

Здесь  $q_s$  – удельный приток флюида из четверти внешней полусферы. Эта величина полностью определяется внешним плоско-радиальным течением и по аналогии с (15) равна

$$q_s = \frac{\pi(1 - p_\Gamma)}{2 \ln l}. \quad (18)$$

Приравняв значения расходов (17) и (18), найдем искомое давление  $p_\Gamma$ :

$$p_\Gamma = \frac{a}{a - \theta \ln l}, \quad a = (r_w - 1), \quad q_s = \frac{\pi \theta a}{2(1 - r_w)(a - \theta \ln l)}. \quad (19)$$

Для значений параметров задачи, принятых выше, будем иметь

$$a = -0.99, \quad p_\Gamma = 0.3, \quad q_s = 0.48.$$

Из сравнения приближенного решения для сферической задачи с численным расчетом, мы нашли значение форм-фактора  $\theta = 0.917$ .

Таким образом, полный дебит  $Q$  горизонтальной скважины складывается из дебита  $q$  основной части ствола (15) и двух дебитов  $q_s$  концевых участков (19). В действительности смена симметрии течения в окрестности концов скважины происходит плавно, поэтому можно принять следующую формулу для полного дебита:

$$Q = (L - L_S) \cdot q + L_S \cdot q_s, \quad (20)$$

где  $L_S$  – параметр, который выбирается так, чтобы вычисленный по формуле (20) дебит  $Q$  совпадал с полученным численно при решении трехмерной задачи.

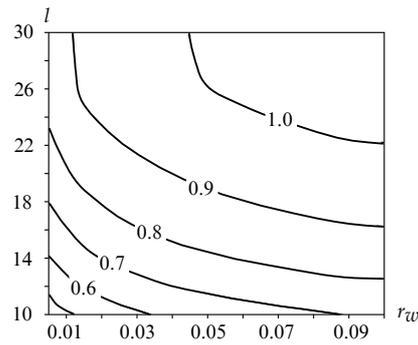
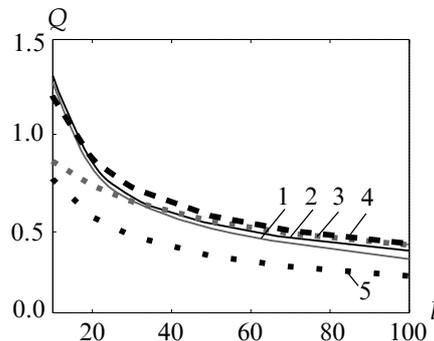

 Рис. 9. Поле значений для параметра  $L_s$ 


Рис. 10. Численный расчет и приближенные оценки дебита ГС: 1 – численный расчет, 2 – приближенный расчет, 3 – формула Борисова, 4 – формула Гигера–Райса, 5 – формула Джоши

Поскольку безразмерная постановка задачи определена двумя критериями подобия  $r_w$  и  $l$ , то и искомый параметр  $L_s$  будет функцией этих переменных при условии, что скважина достаточно длинная ( $L > L_*$ ). Расчеты показали, что  $L_* \approx 5$ ; при меньших значениях  $L$  функция  $L_s$  будет зависеть также и от длины скважины, однако столь короткие горизонтальные скважины не применяются в нефтедобыче.

Зависимость  $L_s(r_w, l)$  показана на рис. 9. Данная функция может быть аппроксимирована и в таком виде использована в формуле (20) для вычисления дебита ГС. По двум параметрам  $r_w$  и  $l$  скважины значение функции  $L_s$  оценивается с помощью интерполяции значений, которые определены заранее в табличном виде из сопоставления приближенного решения для сферической задачи с численным расчетом. Результат в виде зависимости  $Q(l)$  при  $r_w = 0.01$  представлен на рис. 10 в сравнении с численным решением трехмерной задачи (это решение мы считаем точным), а также с результатами, подсчитанными по известным формулам Ю.П. Борисова [17], Гигера–Райса [18], Джоши [19]. Наблюдается удовлетворительная точность полученной приближенной формулы.

**2.2. Приток к скважине с МГРП.** Перейдем к рассмотрению общего случая горизонтальной скважины с многостадийным гидравлическим разрывом пласта. Выберем один фрагмент  $D$  четверти области, ограниченный двумя вертикальными плоскостями, одна из которых проходит по середине трещины ГРП, а другая отстоит от нее на расстоянии  $d$  и проходит по середине между трещинами (см. рис. 11).

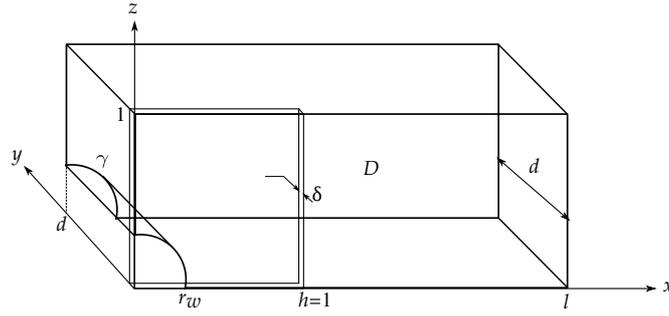


Рис. 11. Область решения задачи о притоке жидкости к горизонтальной скважине с трансверсальной трещиной ГРП

Трехмерная задача для давления  $p$  в коллекторе  $D$  формулируется так же, как в модели (1), и для однородного пласта с учетом плоской симметрии имеет вид

$$\Delta p = 0; \quad (21)$$

$$p|_{\gamma} = 0; \quad p = 1 \quad \text{при } x = l;$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{при } x = 0; \quad y = d; \quad y = 0, \quad x > h; \quad z = 0, 1; \quad (22)$$

$$p = p_f \quad \text{при } y = 0, \quad x \leq h.$$

Плоская задача (9) для давления  $p_f$  в трещине ГРП при  $y_k = 0$ ,  $\delta \rightarrow 0$  и с учетом того, что плоскость  $y = 0$  является плоскостью симметрии для функции  $p$ , принимает вид

$$\Delta p_f + \frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad (23)$$

$$p_f|_{\gamma} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{при } x = h; \quad x = 0. \quad (24)$$

Нетрудно видеть, что для трещин бесконечной проводимости  $M \rightarrow \infty$ , и (23) превращается в уравнение  $\Delta p_f = 0$ , которое при граничных условиях (24) имеет тривиальное решение  $p_f \equiv 0$ . Напротив, для тонких плохопроводящих трещин  $M \rightarrow 0$ , и уравнение (23), предварительно умноженное на  $M$ , вырождается в равенство  $\partial p / \partial y = 0$ , которое с учетом  $p_f = p$  (22) приводит к рассмотренной выше в п. 2.1 задаче о ГС без трещин ГРП.

При конечных  $M$  приближенное решение задачи можно получить, положив  $h = 1$  и «снеся» граничные условия изоляции (24) на фиктивную поверхность  $\Gamma$  – цилиндр единичного радиуса. В этом случае вместо (23), (24) получим радиально-симметричную задачу

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p_f}{\partial r} \right) + \frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad r_w < r < 1, \quad (25)$$

$$p_f = 0 \quad \text{при } r = r_w; \quad \frac{\partial p_f}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 1.$$

Второй член уравнения (25) аппроксимируем выражением

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx \frac{1}{d} (p_d - p_f), \quad (26)$$

где  $p_d(r)$  – давление в пласте в плоскости симметрии  $y = d$ , разделяющей сегменты ГС. Считаем, что эта функция имеет тот же вид, что и в задаче без трещины ГРП:

$$p_d(r) = p_\Gamma \ln \frac{r}{r_w} / \ln \frac{1}{r_w}, \quad (27)$$

однако константа  $p_\Gamma$  здесь другая и подлежит определению. Подставив (26), (27) в (25), получим линейное уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dp_f}{dr} \right) - \frac{p_f}{Md} = p_\Gamma \frac{1}{Md} \frac{\ln r/r_w}{\ln 1/r_w}. \quad (28)$$

Его решение ищется в виде

$$p_f = p_\Gamma p_1, \quad (29)$$

где функция  $p_1$  – решение задачи

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{\partial p_1}{\partial r} \right) + \frac{p_1}{Md} = \frac{1}{Md} \frac{\ln r/r_w}{\ln 1/r_w}, \quad r_w < r < 1, \quad (30)$$

$$p_1(r_w) = 0, \quad \frac{dp_1}{dr}(1) = 0.$$

Задача (30) решается численно. Полный приток к трещине в пределах рассматриваемого сегмента ГС будет, согласно (26), равен

$$Q_f = \frac{\theta_f \pi}{2d} \int_{r_w}^1 (p_d - p_f) r dr, \quad (31)$$

где  $p_d(r)$  определено формулой (27),  $p_f(r)$  – формулой (29), а  $\theta_f$  – форм-фактор. Подставив указанные формулы в (31), получим

$$Q_f = p_\Gamma \theta_f (I_d - I_1), \quad (32)$$

$$I_d = \frac{\pi}{2d} \int_{r_w}^1 r \frac{\ln(r/r_w)}{\ln(1/r_w)} = \frac{\pi}{8d \ln r_w} [2 \ln r_w + 1 - r_w^2]; \quad I_1 = \frac{\pi}{2d} \int_{r_w}^1 p_1(r) r dr.$$

Осталось найти константу  $p_\Gamma$  – давление на фиктивном контуре  $\Gamma$ . Для этого составим балансовое уравнение из (32) и притока  $Q_w$  к скважине

$$Q = Q_w + Q_f = Q_w + p_\Gamma \theta_f (I_d - I_1), \quad (33)$$

откуда

$$p_\Gamma = \frac{Q - Q_w}{\theta_f (I_d - I_1)}. \quad (34)$$

Для основных участков ствола скважины, согласно (14) и (15),

$$Q = \frac{(1 - p_\Gamma)}{(l - 1)} d; \quad Q_w = \frac{\pi d p_\Gamma \theta}{2 \ln(1/r_w)},$$

а для концевых участков, согласно (18) и (20),

$$Q = \frac{(1 - p_\Gamma)}{(l - 1)} d + \frac{\pi (1 - p_\Gamma)}{2 \ln l},$$

$$Q_w = (L - L_s) \frac{\theta \pi p_\Gamma}{2 \ln(1/r_w)} + L_s \frac{\pi \theta p_\Gamma}{2(1 - r_w)}.$$

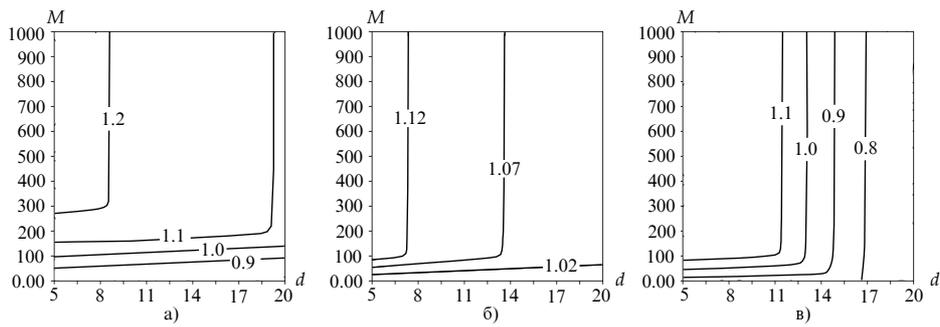


Рис. 12. Значения форм-фактора  $\theta_f$ : а)  $r_w = 0.001$ , б)  $r_w = 0.01$ , в)  $r_w = 0.1$

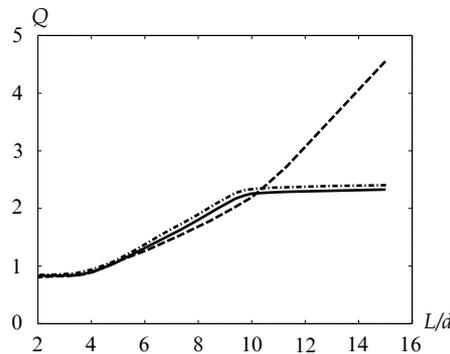


Рис. 13. Сравнение дебита ГС с МГРП: сплошная линия – прямое численное моделирование, пунктирная – аналитическая формула из работы [20], штрих-пунктирная – упрощенная методика (25)–(34)

Выражение (34) замыкает решение задачи. Оно позволяет подсчитать притоки к трещине (32), скважине  $Q_w$  и полный приток (33) к фрагменту ГС с МГРП.

Значения форм-фактора  $\theta_f$  приведены на рис. 12 при разных значениях  $r_w$ ,  $d$ ,  $M$ . Видно, что  $\theta_f$  мало отличается от единицы в широком диапазоне изменения параметров задачи.

Приближенная аналитическая формула оценки дебита ГС с трансверсальными трещинами ГРП была ранее получена в работе [20]. На рис. 13 приведены графики зависимости полного дебита  $Q$  от количества трещин  $L/d$ , подсчитанные с помощью прямого численного моделирования, по упрощенной методике (25)–(34) и по формуле [20] при  $r_w = 10^{-2}$ ,  $L = 20$ . Видно, что при малом количестве трещин все результаты хорошо согласуются, однако при увеличении их числа формула [20] значительно теряет точность, не описывая выход на предельную эффективность.

### Выводы

Оценка эффективности проведения МГРП на горизонтальной скважине предполагает установление связи между приростом ее продуктивности с параметрами гидроразрыва ( $\delta$ ,  $h$ ,  $d$ ,  $\sigma_f$ ) при заданных характеристиках пласта ( $l$ ,  $H$ ,  $p_i$ ,  $\sigma$ ) и скважины ( $r_w$ ,  $p_w$ ,  $L$ ). Формулировка задачи в безразмерных переменных позволила сократить число параметров и представить результаты многовариантных расчетов в виде номограмм эффективности на рис. 4, 5. Показано, что кратность увеличения дебита ГС за счет МГРП не превышает 4; установлены пределы изменения параметров гидроразрыва, влияющие на эффективность. Математическая

модель притока к ГС с МГРП и конечнообъемный метод её численной реализации без труда могут быть обобщены на случай двухфазной фильтрации.

Для экспресс-оценки эффективности МГРП, а также в общих фильтрационных моделях крупных нефтяных месторождений целесообразно использовать упрощенную методику, представленную в виде формул (32)–(34). Они получены в предположении о различных видах симметрии фильтрационного течения в окрестности ГС. Реальное отклонение от симметрии учитывалось адаптивными коэффициентами  $\theta$ ,  $\theta_f$ ,  $L_s$ , которые определялись в ходе сопоставления с результатами численного моделирования. В результате полученные приближенные решения оказались несколько точнее известных инженерных формул, о чем свидетельствуют рис. 10, 13.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан (проекты № 15-41-02699, 15-41-02698), а также компании British Petroleum (грант № 063100027).

### Summary

*A.B. Mazo, K.A. Potashev, M.R. Khamidullin.* Mathematical Model of Fluid Filtration to a Multistage Hydraulically Fractured Horizontal Well.

This paper presents a three-dimensional numerical model based on the finite volume method for simulation of single-phase fluid filtration towards a multistage hydraulically fractured horizontal well (MHFW). The impact of fracture and well characteristics on the well productivity is numerically investigated. The approximation method for multistage fracturing efficiency estimation is proposed. It is based on a 3D problem simplification to a one-dimensional partial differential model due to different kinds of flow symmetry in the near well-bore area. The resulting solution of the simplified problem is improved with the help of 3D simulation. The technique can be used for rapid multistage fracturing efficiency estimation. Furthermore, it can be embedded into generic oil reservoir simulation models.

**Keywords:** horizontal well, multistage hydraulic fracturing, one-phase filtration.

### Литература

1. *McGuire W.J., Sikora V.J.* The Effect of Vertical Fractures on Well Productivity // J. Petrol. Technol. – 1960. – V. 12, No 10. – P. 72–74.
2. *Gringarten A.C., Ramey H.J., Raghavan R.* Unsteady-state pressure distributions created by a well with a single infinite-conductivity vertical fracture // Soc. Petrol. Eng. J. – 1974. – V. 14, No 4. – P. 347–360.
3. *Prats M.* Effect of Vertical Fractures on Reservoir Behavior – Incompressible Fluid Case // Soc. Petrol. Eng. J. – 1961. – V. 1, No 2. – P. 105–118.
4. *Шведлер М.И.* Приток жидкости к скважине с трещиной в призабойной зоне // Изв. АН СССР. ОТН. – 1955. – № 11. – С. 95–100.
5. *Каневская Р.Д., Жучков С.Ю.* Опыт моделирования и оценки эффективности горизонтальных скважин с трещинами гидроразрыва на Верхне-Шапшинском месторождении // Нефтяное хозяйство. – 2003. – № 7. – С. 92–96.
6. *Ngheim L.X., Sharma R., Collins D.A.* Simulation of horizontal and deviated wells in naturally fractured reservoirs // Annual Technical Meeting, Calgary, Alberta. June 7–10, 1992. – Petrol. Soc. Canada, 1992. – Art. No PETSOC-92-15.
7. *Raghavan R., Chen C.C., Agarwal B.* An analysis of horizontal wells intercepted by multiple fractures // Soc. Petrol. Eng. J. – 1992. – V. 2, No 3. – P. 235–245.

8. *Guo G., Evans R.D.* Pressure-transient behavior and inflow performance of horizontal wells intersecting discrete fractures // SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Houston, Texas, Oct. 3–6, 1993. – Soc. Petrol. Eng., 1993. – Art. No SPE-26446-MS.
9. *Freeman G.M.* Study of flow regimes in multiply-fractured horizontal wells in tight gas and shale gas reservoir system: Master's Thesis. – Texas: Texas A&M University, 2010. – 80 p.
10. *Yu W., Sepehrnoori K.* Optimization of multiple hydraulically fractured horizontal wells in unconventional gas reservoirs // J. Petrol. Eng. – 2013. – V. 2013. – Art. No 151898, P. 1-16.
11. *Yao S., Zeng F., Liu H., Zhao G.* A semi-analytical model for multi-stage fractured horizontal wells // J. Hydrology. – 2013. – V. 507. – P. 201–212.
12. *Мазо А.Б., Поташев К.А., Калинин Е.И., Булыгин Д.В.* Моделирование разработки нефтяных месторождений методом суперэлементов // Матем. моделирование. – 2013. – Т. 25, № 8. – С. 51–64.
13. *Soliman M.Y., Boonen P.* Review of fractured horizontal wells technology // 7th Abu Dhabi International Petroleum Exhibition and Conference, Abu Dhabi, United Arab Emirates, Oct. 13–16, 1996. – Soc. Petrol. Eng., 1996. – Art. No SPE-36289-MS.
14. *Mukherjee H., Economides M.J.* A parametric comparison of horizontal and vertical well performance // SPE Formation Evaluation. – 1991. – V. 6, No 2. – P. 209–216.
15. *Soliman M.Y., Boonen P.* Fracturing horizontal wells in gas reservoirs // SPE Production & Facilities. – 1999. – V. 14, No 4. – P. 277–283.
16. *Мазо А.Б., Калинин Е.И., Булыгин Д.В.* Моделирование двухфазной фильтрации в окрестности тектонического разлома нефтяного пласта // Георесурсы. – 2013. – Т. 53, № 3. – С. 14–16.
17. *Борисов Ю.П., Пилатовский В.П., Табаков В.П.* Разработка нефтяных месторождений горизонтальными и многозабойными скважинами. – М.: Недра, 1964. – 154 с.
18. *Giger F.M., Reiss L.H., Jourdan A.* The reservoir engineering aspect of horizontal drilling // SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Houston, Texas, Sept. 16–19, 1984. – Soc. Petrol. Eng., 1984. – Art. No SPE-13024-MS.
19. *Joshi S.D.* Horizontal Well Technology. – Tulsa, Okla.: PennWell Books, 1991. – 552 p.
20. *Guo G., Evans R.D.* Inflow performance and production forecasting of horizontal wells with multiple hydraulic fractures in low-permeability gas reservoirs // SPE Gas Technology Symposium, Calgary, Alberta, Canada, 28–30 June, 1993. – Soc. Petrol. Eng., 1993. – Art. No SPE-26169-MS.

Поступила в редакцию  
23.06.15

---

**Мазо Александр Бенцианович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры аэрогидромеханики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: [abmazo1956@gmail.com](mailto:abmazo1956@gmail.com)

**Поташев Константин Андреевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры аэрогидромеханики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: [kpotashev@mail.ru](mailto:kpotashev@mail.ru)

**Хамидуллин Марсель Рашитович** – аспирант кафедры аэрогидромеханики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: [marseille.ksu@gmail.com](mailto:marseille.ksu@gmail.com)