УДК 521.9

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ УРОВЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ МОДЕЛИ ЗЕМЛИ В НЕПОДВИЖНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ МЕТРИКЕ КЕРРА

Александр Викторович Елагин
Сибирский государственный университет геосистем и технологий, 630108, Россия, г. Новосибирск, ул. Плахотного, 10, кандидат технических наук, доцент кафедры физической геодезии и дистанционного зондирования, тел. (383)243-29-11, e-mail: VG@ssga.ru

Инна Евгеньевна Дорогова
Сибирский государственный университет геосистем и технологий, 630108, Россия, г. Новосибирск, ул. Плахотного, 10, кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры физической геодезии и дистанционного зондирования, тел. (383)243-29-11, e-mail: inna_dorogova@mail.ru

Для вывода формул учета релятивистских эффектов необходимо знать коэффициенты пространственно-временной метрики (метрический тензор), которые могут быть получены из решения уравнений Эйнштейна. В 1963 году Р. Керр смог найти точное решение уравнений Эйнштейна в случае осесимметричного вращающегося тела. Пространственно-временную метрику Р. Керра можно использовать и в геодезии. В нашей работе исследуется форма уровенной поверхности осесимметричной вращающейся модели Земли в неподвижной пространственно-временной метрике Керра. Релятивистский геоид представляет собой двухмерную поверхность, в любой точке которой скорость хода часов статического наблюдателя, расположенного на этой поверхности, является величиной постоянной. Поэтому для получения уравнения уровенной поверхности вращающейся осесимметричной модели Земли в системе отсчета неподвижного наблюдателя в уравнении интервала метрики Керра коэффициент при временной координате был принят равным константе. Эта константа связана с потенциалом тяготения. В статье выполнено решение полученного уравнения и определение отклонений уровенной поверхности исследуемой модели Земли от земного эллипсоида. В результате исследования установлено, что уровенная поверхность вращающейся модели Земли располагается выше поверхности согласованного эллипсоида, максимальное отклонение достигает девяти метров.

Ключевые слова: уровенная поверхность, пространственно-временная метрика Керра, земной эллипсоид, релятивистский геоид, инерциальная система отсчета, гравитационный радиус Земли, релятивистская геодезия, общая теория относительности.

DETERMINATION OF INITIAL LEVEL FORM OF ROTATING AXE SYMMETRICAL EARTH MODEL IN MOTIONLESS SPATIO-TEMPORAL KERR METRIC

Aleksandr V. Elagin
Siberian State University Geosystems and Technologies, 630108, Russia, Novosibirsk, 10 Plakhotnogo St., Ph. D., Associate Professor, Department of Physical Geodesy and Remote Sensing, tel. (383)243-29-11, e-mail: VG@ssga.ru

Inna E. Dorogova
Siberian State University Geosystems and Technologies, 630108, Russia, Novosibirsk, 10 Plakhotnogo St., Ph. D., Senior Lecturer, Department of Physical Geodesy and Remote Sensing, tel. (383)243-29-11, e-mail: inna_dorogova@mail.ru

For derivation of formulae of relativistic effects it is necessary to know coefficients of spatial-temporal metrics (metric tensor), which can be driven from Einstein equations. In 1963 R. Kerr managed to find exact solution of Einstein equations in case of axe symmetrical rotating body. This spatial-temporal method can also be used in geodesy. Our work investigates the form of initial level form of axe symmetrical rotating Earth model in motionless spatial-temporal Kerr metrics. Relativistic geoid represents a 2 dimensional surface, in any point of which the clock running speed of the observer on this surface is the constant value. That is why for derivation of equation of initial level of axe symmetrical Earth model in reference system of motionless observer in the equation of interval Kerr metrics the coefficient of time coordinate was accepted as equal to a constant. This constant is tied to gravitational potential. The article gives the solution of the obtained equation and determination of deviation of initial level of investigated Earth model from the Earth's ellipsoid. As a result it is stated, that the initial level position of the rotating Earth model is higher than that of conforming ellipsoid, maximum deviation being up to nine meters.

Key words: initial level, spatial-temporal Kerr metrics, Earth ellipsoid, relativistic geoid, inertial reference system, gravitational radius of the Earth, relativistic geodesy, general relativity theory.

В настоящее время для решения многих научных и практических задач геодезии требуется сантиметровый уровень точности вычисления траекторий движения искусственных спутников Земли (ИСЗ), координат наземных пунктов, высот квазигеоида и других величин [1–5]. Такой высокий уровень точности требует учета релятивистских эффектов. Это вызвано тем, что спутники и точки земной поверхности двигаются в инерциальной системе отсчета со скоростями, соизмеримыми со скоростью света.

Для вывода формул учета релятивистских эффектов необходимо знать коэффициенты пространственно-временной метрики (метрический тензор), которые могут быть получены из решения уравнений Эйнштейна. В 1916 г. К. Шварцшильду удалось найти точное аналитическое решение в случае центрально-симметричного тела. Именно пространственно-временная метрика Шварцшильда в основном используется для многих приложений в астрономии и геодезии.

В 1963 г. Р. Керр [6] смог найти точное решение уравнений Эйнштейна в случае осесимметричного вращающегося тела. Полученное решение было предназначено для изучения черных дыр, но пространственно-временную метрику Р. Керра можно использовать и в геодезии. Впервые она была использована в геодезии А. Бьерхаммером в 1985 г. [7] при разработке метода определения геопотенциала по изменениям частоты точных атомных стандартов времени и частоты.

В нашей работе исследуется форма уровенной поверхности осесимметричной вращающейся модели Земли в неподвижной пространственно-временной метрике Керра. Р. Керр получил выражения для интервала в следующем виде [6]:

$$ds^2=(dt)^2-(dx)^2-(dy)^2-(dz)^2-\left[2Mr^3/\left(r^4+a^2z^2\right)\right]\left\{dt-1/\left(r^2+a^2\right)\left[r\left(xdx+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+ydy\right)+a\left(xdy-ydx\right)\right]-\left(z/r\right)dz\right\}^2, \quad (1)$$

где было принято, что скорость света $c=1$ и гравитационная постоянная $f=1$; t – время, которое показывают часы неподвижного относительно звезд наблюдателя, расположенного в центре масс модели Земли; M – масса тела; a – нормированный на скорость света удельный момент количества движения; r – геоцентрическое расстояние в метрике Керра. Геоцентрическое расстояние связано с прямоугольными координатами галилеевой метрики соотношением

$$r^4 - r^2\left(x^2+y^2+z^2-a^2\right) - a^2z^2 = 0.$$

В 1967 г. Р. Бойер и Р. Линдквист преобразовали уравнение Керра и получили следующее выражение для интервала [8]:

$$ds^2 = -\frac{\rho^2\Delta}{A}dt^2 + \frac{A\sin^2\theta}{\rho^2}\left(d\phi - \frac{2ar_g r}{A}dt\right)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2, \tag{2}$$

где φ – долгота;

θ – приведенная коширота, отсчитываемая от северного полюса;

$r_g = \dfrac{2fM}{c^2}$ – гравитационный радиус Земли;

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta;$$

$$\Delta = r^2 - r_g r + a^2, \quad A = \left(r^2+a^2\right) - a^2\Delta\sin^2\theta.$$

Если раскрыть скобки, привести подобные члены и пренебречь малыми членами порядка r^{-3}, то получим выражение для интервала, представленное в работе [8]

$$ds^2 = \left(-1+\frac{r_g r}{\rho^2}\right)dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} + \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2 r_g r}{\rho^2}\sin^2\theta\right)\sin^2\theta\, d\varphi^2 -$$

$$-\frac{2r_g ar}{\rho^2}\sin^2\theta\, d\varphi\, dt. \tag{3}$$

В работах [9–21] представлено определение релятивистского геоида: релятивистский геоид представляет собой двухмерную поверхность, в любой точке которой скорость хода часов статического наблюдателя, расположенного на поверхности, является величиной постоянной.

Поэтому, если приравнять константе C коэффициент при dt^2 уравнения (3), получим уравнение уровенной поверхности вращающейся осесимметричной модели Земли в системе отсчета неподвижного наблюдателя

$$-1+\frac{r_g r}{\rho^2}=-1+C=\text{const}. \qquad (4)$$

Уравнение поверхности (4) также можно получить непосредственно из уравнения Керра (1), объединив члены при dt^2. В результате получим

$$1-\frac{2Mr^3}{r^4+a^2z^2}=1-\frac{2Mr}{r^2+a^2z^2/r^2}=1-\frac{2Mr}{r^2+a^2\cos^2\theta}=1-\frac{r_g r}{\rho^2}=1-C=\text{const}. \qquad (5)$$

После преобразований уравнений (4) или (5) получается квадратное уравнение с неизвестным радиусом-вектором r в пространственно-временной метрике Керра

$$Cr^2-r_g r+Ca^2\cos^2\theta=0. \qquad (6)$$

Решением уравнения (6) будет являться положительный корень

$$r(C,\theta)=\frac{-r_g+\sqrt{r_g^2-4C^2a^2\cos^2\theta}}{2C}. \qquad (7)$$

Если в выражении (7) задать определенные значения постоянной C и удельного момента, то, изменяя кошироту дискретно с определенным шагом от северного полюса до экватора, можно определить форму уровенной поверхности вращающейся осесимметричной модели Земли в неподвижной системе отсчета.

Форма уровенной поверхности зависит только от двух параметров: a и C, которые подбирались таким образом, чтобы при $\theta=0^\circ$ значение r совпало с малой полуосью, а при $\theta=90^\circ$ – с большой полуосью общеземного эллипсоида системы координат GRS-80.

Для приближенной оценки значений параметров a и C использовались значения параметров эллипсоида GRS-80 $\bar{a}=6\,378\,140$ м, $\bar{b}=6\,356\,755{,}302$ м; угловой скорости вращения Земли $\omega=7{,}292\,115\cdot10^{-5}$ рад/с; гравитационной постоянной $f=6{,}673\cdot10^{-11}\,\text{м}^3/(\text{с}^2\text{кг})$; гравитационного параметра $fM=398\,600{,}5$ м^3/с^2; гравитационного радиуса $r_g=8{,}87\cdot10^{-3}$ м; нормального потенциала на поверхности эллипсоида $U_0=62\,636\,861$ м^2/с^2.

Масса Земли равна $M=fM/M=5{,}973\cdot10^{24}$ кг, момент количества движения $J=2M\bar{a}^2\omega/5=7{,}088\cdot10^{33}$ кг·м/с, удельный момент количества движения $a=J/(M\cdot c)=3{,}958$ м, $C=2U_0/c^2=1{,}393\,858\cdot10^{-9}$ м.

Для согласования эллипсоида с моделью осесимметричной Земли были получены следующие формулы:

$$C = \frac{r_g}{\bar{a}}, \quad a = \sqrt{\frac{r_g^2 - (2Cb - r_g)^2}{4C^2}}. \tag{8}$$

Вычисления по формулам (8) привели к следующим значениям: $C = 1{,}390\ 696\ 56 \cdot 10^{-9}$ м, $a = 368\ 696{,}744$ м. Результаты эксперимента показали, что для согласования фигуры эллипсоида с осесимметричной моделью Земли по критерию совпадения с большой и малой полуосями приходится значительно изменять удельный момент количества движения. С другой стороны, удельный момент количества движения, связанный с радиусом инерции и сжатием осесимметричной модели фигуры Земли, является аналогом удаления фокуса эллипсоида от центра эллипсоида. Для эллипсоида GRS-80 фокусы удалены от центра на 521 854, 274 м. Геоцентрические расстояния точек поверхности эллипсоида в галилеевой метрике могут быть вычислены по формулам

$$x_e = \bar{a} \cdot \sin\theta; \; y_e = \bar{b} \cdot \cos\theta; \; r_e = \sqrt{x_e^2 + y_e^2}. \tag{9}$$

По формулам (7) и (9) выполнены, соответственно, расчеты радиусов-векторов уровенной поверхности осесимметричной модели Земли в неподвижной пространственно-временной метрике Керра и радиусов-векторов эллипсоида в галилеевой метрике с дискретностью пять градусов от северного полюса до экватора. Отклонения уровенной поверхности вращающейся модели Земли в неподвижной пространственно-временной метрике Керра от поверхности эллипсоида в галилеевой метрике представлены на рис. 1 и в таблице.

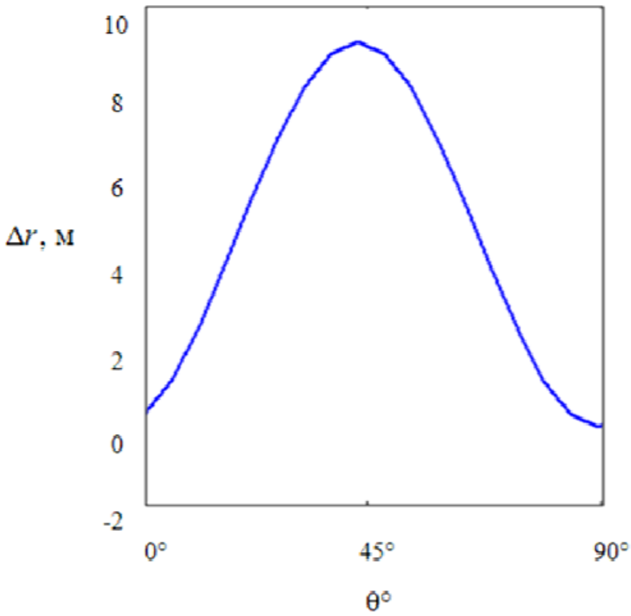

Рис. 1. Отклонения осесимметричной модели Земли от эллипсоида в плоскости меридиана

Таблица

Отличие осесимметричной модели Земли от поверхности эллипсоида

Значения кошироты, θ	Отклонения осесимметричной модели Земли от земного эллипсоида, Δr (м)
0°	0,000 0
5°	0,273 0
10°	1,058 7
15°	2,261 8
20°	3,736 1
25°	5,303 0
30°	6,772 7
35°	7,967 6
40°	8,743 6
45°	9,007 6
50°	8,728 3
55°	7,940 2
60°	6,738 7
65°	5,268 8
70°	3,707 4
75°	2,242 1
80°	1,048 7
85°	0,270 3
90°	0,000 0

Из рис. 1 видно, что уровенная поверхность вращающейся модели Земли располагается выше поверхности согласованного эллипсоида. Максимальное отклонение достигает девяти метров для точек с кoширотой $\theta = 45^{\circ}$ (рис. 2).

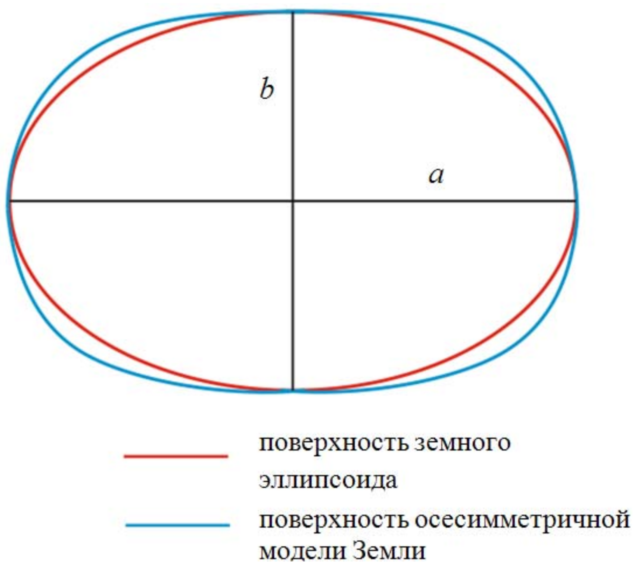

Рис. 2. Взаимное расположение поверхностей земного эллипсоида и осесимметричной модели Земли

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-27-00068).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Проблемы обеспечения точности координатно-временных определений на основе применения ГЛОНАСС технологий / А. С. Толстиков, Ю. В. Сурнин, К. М. Антонович, В. А. Ащеулов // Вестник СГГА. – 2012. – Вып. 2 (18). – С. 3–11.

2. Антонович К. М. Пути развития ГНСС технологий в геодезии // Вестник СГГА. – 2006. – Вып. 11. – С. 52–57.

3. Елагин А. В., Дорогова И. Е. Оценка влияния релятивистских эффектов на траекторию движения искусственных спутников Земли // Вестник СГУГиТ. – 2015. – Вып. 3 (31). – С. 32–39.

4. Елагин А. В., Дорогова И. Е., Мареев А. В. Исследование взаимосвязи смешанных и чистых аномалий силы тяжести // Вестник СГГА. – 2014. – Вып. 3 (27). – С. 70–83.

5. Определение разности потенциалов силы тяжести и высот в геодезии посредством гравиметрических и спутниковых измерений / В. Ф. Канушин, А. П. Карпик, Д. Н. Голдобин, И. Г. Ганагина, Е. Г. Гиенко, Н. С. Косарев // Вестник СГУГиТ. – Вып. 3 (31). – 2015. – С. 53–69.

6. Kerr R. P. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metric. // Phys. Rev. Letters. – 1963. – Vol. 11. – P. 237–238.

7. Bjerhammar A. On a relativistic geodesy. Bull.Geod, 1985. – 207 pp.

8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. 7-е изд. – М. : Наука, 1988. – 512 с.

9. Kopeikin S., Efroimsky M., Kaplan G. Relativistic Celestial Mechanics of the Solar System. – Berlin: Wiley-VCH, 2011. – 860 pp.

10. Kopeikin S. M., Petrov A. N. Post-Newtonian celestial dynamics in cosmology: Field equations // Phys. Rev. – 2013. – D87 (4). arXiv:1301.5706, doi:10.1103/PhysRevD.87.044029.

11. Kopeikin S. M., Petrov A. N. Dynamic field theory and equations of motion in cosmology // Annals of Physics. – 2014. – 350. – P. 379–440. arXiv:1407.3846, doi:10.1016/j.aop.2014.07.029.

12. Kopejkin S. M. Relativistic Manifestations of gravitational fields in gravimetry and geodesy // Manuscripta Geodaetica. – 1991. – 16. – P. 301–312.

13. Kopeikin S. M., Han W.-B., Mazurova E. M. Post-Newtonian theory of Earth's reference-ellipsoid // Geophys. J. Int. – 2015. – Vol. XX. – P. 1–19.

14. Kopeikin S. M., Mazurova E. M., Karpik A. P. Towards an exact relativistic theory of Earth's geoid undulation // Physics Letters A. – 2015. – 379. – P. 1555–1562.

15. Müller J., So_el M., Klioner S.A. Geodesy and relativity // Journal of Geodesy. – 2008. – 82. – P. 133–145, doi:10.1007/s00190-007-0168-7.

16. Mai E. Time, atomic clocks, and relativistic geodesy // Deutsche Geodatische Kommission der Bayerischen Akademie der Wissenschaften (DGK). – 2014. – 128 pp. – Report No 124,. Available online: http://dgk.badw.de/fileadmin/docs/a-124.pdf.

17. Mai E., Muller J. General remarks on the potential use of atomic clocks in relativistic geodesy // ZFV - Zeitschrift fur Geodasie, Geoinformation und Landmanagement. – 2013. – Vol. 138 (4). – P. 257-266.

18. Petit G., Wolf P., Delva P. Atomic time, clocks, and clock comparisons in relativistic spacetime: a review // Frontiers in Relativistic Celestial Mechanics. – Vol. 2 Applications and Experiments / Ed. S. Kopeikin, De Gruyter. – Berlin, 2014. – P. 249-279, doi:10.1515/9783110345667.249.

19. Ashby N. Relativity in the global positioning system // Living Rev. Relativity. – 2003. – Vol. 6. – 42 pp., doi: 10.12942/lrr-2003-1, url: http://www.livingreviews.org/lrr-2003-1.

20. Klioner S. Angular velocity of rotation of extended bodies in general relativity // Dynamics, ephemerides, and astrometry of the solar system. Proceedings of the 172nd Symposium of the IAU Kluwer, Dordrecht, 1995. – P. 309–320.

21. Klioner S., Soffel M., Xu Ch., Wu X. Earth's rotation in the framework of general relativity: rigid multipole moments // Proc of Les Journées. Session V: Ephemeris and dynamical reference systems. – Paris, 2001, arXiv:astro-ph/0303377.

Получено 08.04.2016