УДК 622.273.2:622.831

А.П.ГОСПОДАРИКОВ, В.В.ИВАКИН,
О.Е.КАРПУХИНА, М.А.КЕРЕЙЧУК
Санкт-Петербургский государственный
горный институт (технический университет)

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД ПРИ РАЗРАБОТКЕ ПЛАСТОВЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

Разработан алгоритм (численно-аналитический) решения нелинейных задач геомеханики, основанный на комбинации вариационного метода Власова, метода линеаризации Ньютона – Канторовича и общего итерационного процесса. Физическая нелинейность процесса деформирования материала горных пород рассматривается в рамках основных гипотез малых упругопластических деформаций Генки – Ильюшина.

The numerical analytic method of solution of nonlinear tasks of geomechanics is elaborated. This method is based on combination of variation method by Vlasov, the method lianeration by Newton-Kantorovich and common iteration process method. The physical nonlinear of mining rock material deformation process is considered in the limits of the main hypothesizes of the small elastic and plastic deformation by Genki-Ilushin.

Упругопластические задачи о напряженно-деформированном состоянии (НДС) возмущенного массива представляют обширный раздел современной горной геомеханики. Современные методы расчета НДС подработанного массива горных пород, базирующиеся на различных условиях пластичности в упругопластической области и аналитических решениях в упругой области, являются весьма сложными. Точные решения получены лишь для ограниченного числа частных задач. Существующая тенденция разработки полезных ископаемых на больших глубинах предопределяет построение эффективных расчетных методов и более широкое их внедрение в инженерную практику. Предлагаемый метод основан на сочетании вариационного метода Власова [1], метода линеаризации Ньютона – Канторовича [4], гипотезах теории малых упругопластических деформаций Ильюшина [3, 5], метода продолжения решения по числовому параметру λ и общего итерационного процесса.

Рассмотрим НДС массива горных пород, удовлетворяющих следующим условиям:

1. Зависимость напряжений от деформаций при пропорциональном возрастании внешних сил: диаграмму $\sigma - \varepsilon$ при растяжении с некоторой скоростью полагаем нелинейной. Зависимость $\sigma - \varepsilon$, установленную диаграммой растяжения, примем в виде

$$\sigma = \Phi(\varepsilon) = E\varepsilon\left[1 - \omega(\varepsilon)\right], \qquad (1)$$

где функция Φ обладает свойством $E \geq \dfrac{1}{\varepsilon}\ \Phi(\varepsilon) \geq \dfrac{d\Phi}{d\varepsilon} \geq 0$.

Это означает, что материал массива в общем случае обладает упрочнением.

2. Процессы разгрузки и повторной загрузки считаем упругими. Если разгрузка начинается при напряжении $\sigma = \sigma^*$ и деформации $\varepsilon = \varepsilon^*$, то текущие напряжение σ и деформация ε определяются законом Гука в виде $\sigma - \sigma^* = E(\varepsilon - \varepsilon^*)$ или $\sigma = \mathring{A}(\varepsilon - \varepsilon_p)$; $\varepsilon_p = \varepsilon^* - \sigma^*/E$, где ε_p – пластическая деформация. Кроме того, предполагается, что в процессе разгрузки никогда не возникает вторичная пластическая деформация (эффект Баушингера), и поэтому в результате повторной нагрузки, как только напряжение

достигает исходного значения σ^*, вновь вступает в силу зависимость (1).

Отметим, что рассматриваем активную деформацию элемента породного массива, когда интенсивность напряжений σ_i принимает значение, превышающее все предшествующие. Если σ_i меньше хотя бы одного предшествующего значения, деформацию элемента полагаем пассивной. Таким образом, в случае активной деформации (процесс нагружения) за пределами упругости пластическая деформация элемента породного массива возрастает, а в случае пассивной остается постоянной (при разгрузке).

3. Объемное напряжение $(\sigma_0 = 3K\varepsilon_0)$ элемента массива подчиняется закону Гука (является упругим как при активной, так и при пассивной деформации), согласно которому

$$K = \frac{E}{3\,(1-2\nu)}\,;\;\; \sigma_0 = \frac{1}{3}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right);$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right);\;\; \theta = 3\varepsilon_0\,.$$

Это означает, что изменение объема происходит только за счет упругих деформаций, а при пластических деформациях материал ведет себя как несжимаемый.

Так как главные оси тензоров напряжений и деформаций совпадают [3], то это приводит к пропорциональности компонентов девиатора деформаций компонентам девиатора напряжений. Тогда в проекциях на оси Ox, Oy (при плоском напряженном состоянии) данную связь между девиаторами напряжений и деформаций примем в форме, предложенной А.А.Ильюшиным [3] для случая малых упругопластических деформаций:

$$\sigma_x - \frac{1}{2}\sigma_y = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\varepsilon_x;\;\; \sigma_y - \frac{1}{2}\sigma_x = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\varepsilon_y;$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{xy}\,. \tag{2}$$

Отсюда

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2}\,;$$
$$\varepsilon_i = \frac{2}{3}\sqrt{\varepsilon_x^2 - \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \frac{3}{4}\gamma_{xy}^2}\,. \tag{3}$$

Интенсивность напряжений σ_i для каждого материала породного массива является функцией интенсивности деформаций ε_i и не зависит от характера напряженного состояния:

$$\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)\,, \tag{4}$$

или, выделяя упругую часть,

$$\sigma_i = 3G\varepsilon_i\left[1 - \omega(\varepsilon_i)\right];$$

$$\omega = \frac{3G\varepsilon_i - \sigma_i}{3G\varepsilon_i} = 1 - \frac{1}{3G}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\,,$$

где G – модуль сдвига.

Согласно гипотезе упрочнения для горных пород, между величинами σ_i и ε_i имеется определенная зависимость (4), которая достаточно точно согласуется с результатами экспериментов в случае простого нагружения, когда она аппроксимируется степенной функцией

$$\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i) = A\varepsilon_i^s\,, \tag{5}$$

где параметры A, s определяются экспериментально.

Представив компоненты вектора перемещений (искомые функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$) в виде $u(x,y) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)\varphi_i(y)$; $v(x,y) = \sum_{j=1}^{m} v_j(x)\psi_j(y)$ и подставляя в известные уравнения равновесия зависимости для напряжений и производных от них, а также функции ω, $\partial\omega/\partial x$, получим систему $(n + m)$ нелинейных уравнений второго порядка [2], решая которую определим компоненты напряжений и деформаций (ввиду громоздкости общий вид данной системы не приводится).

Таким образом, для определения НДС массива горных пород при малых упругопластических деформациях необходимо задать зависимость $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$, определяемую экспериментально. Для горных пород вид этой функциональной связи зависит от условий испытаний и соотношения действующих напряжений. При определении функции $\Phi(\varepsilon_i)$ были использованы экспериментальные диаграммы, полученные для образцов калийной соли Березниковского месторождения. Эти диаграммы были перестроены в координатах $\tau_{окт} - \gamma_{окт}$, связанных с величинами σ_i и ε_i (3) следующими соотношениями:

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}}\tau_{окт}; \quad \varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_{окт},$$

где $\tau_{окт}$, $\gamma_{окт}$ – октаэдрические напряжение и деформация соответственно.

Аппроксимируя данные графические (экспериментальные) зависимости (при условии достижения минимума среднеквадратического отклонения), получим $\tau_{окт} = (45 \div 53)\,\gamma_{окт}^{0,32-0,38}$; для одноосного сжатия $\tau_{окт} = 44{,}5\gamma_{окт}^{0,38}$.

Учитывая приближенный характер инженерных расчетов, при описании поведения реальных породных массивов принимаем $\sigma_i = 3(35{,}8 \div 42{,}2)\,\varepsilon_i^{1/3}$ (модуль сдвига на начальном участке диаграммы напряжений $G_0 = 3,\ 3 \cdot 10^3$ МПа).

Так как для теоретических расчетов $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$ с выделением упругой составляющей $\sigma_i = 3G_0\varepsilon_i[1 - \omega(\varepsilon_i)]$, где $\omega(\varepsilon_i) = 1 - (29{,}54 \div 34{,}83)10^{-3}\varepsilon_i^{-2/3}$, то поведение калийной соли при объемном напряженном состоянии можно описать зависимостью (5), где коэффициенты A = 120 МПа, s = 1/3.

Для определения деформации массива горных пород при линейной аппроксимации диаграммы напряжений можно использовать метод упругих решений, предложенный А.А.Ильюшиным [3]. В частности, принимая обобщенные перемещения в виде $u(x,y) = u_1(x)\varphi_1(y)$, $v(x,y) = v_1(x)\psi_1(y)$ и подставляя их в уравнения равновесия, получим на основе принципа возможных перемещений Лагранжа (с учетом введения «эквивалентного» упругого слоя) следующую систему:

$$\int_0^{h_1} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\varphi_1 dy - \int_0^{h_1}\tau_{xy}\varphi_1' dy = 0;$$

$$\int_0^{h_1} \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}\psi_1 dy - \int_0^{h_1}\sigma_y\psi_1'\,dy + \gamma h_2\psi_1(h_1) + $$

$$+\gamma\int_0^{h_1}\psi_1 dy = 0. \qquad (6)$$

Согласно принятому условию линейной аппроксимации диаграммы напряжений $d\sigma_i / d\varepsilon_i = \text{const}$, функция $\omega(\varepsilon_i)$ имеет вид

$$\omega = \left(1 - \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_i}\right)\left(1 - \frac{1}{3G}\frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i}\right),$$

а уравнения равновесия (6) преобразуются к следующей системе нелинейных уравнений:

$$a_{11}u_1'' - \frac{1-\nu}{2}u_1 b_{11} + \left(\nu t_{11} - \frac{1-\nu}{2}c_{11}\right)v_1' = \frac{1-\nu}{2}R_x;$$

$$(7)$$

$$-\left(\nu t_{11} - \frac{1-\nu}{2}c_{11}\right)u_1' + \frac{1-\nu}{2}r_{11}v_1'' - s_{11}v_1 +$$

$$+\frac{1-\nu}{2}q_1 = \frac{1-\nu}{2}R_y,$$

где коэффициенты $a_{11} = \int\varphi_1^2 dy$; $r_{11} = \int\psi_1^2 dy$; $b_{11} = \int(\varphi_1')^2 dy$; $s_{11} = \int(\psi_1')^2 dy$; $c_{11} = \int\varphi_1'\psi_1 dy$; $t_{11} = \int\varphi_1\psi_1' dy$; $q_1 = \frac{1}{G}\left(\gamma h_2\psi_1(h_1) + \gamma q_{11}\right)$; $q_{11} = \int\psi_1 dy$ вычисляются интегрированием по всей толщине эквивалентного упругого слоя h_1.

Нелинейная система уравнений равновесия решается методом упругих решений А.А.Ильюшина [3]. В качестве первого приближения отыскивается решение (7), в случае $R_x = R_y = 0$ получается чисто упругое решение. Симметричная система уравнений (7) может быть сведена к некоторым дифференциальным уравнениям 4-го порядка относительно любого из обобщенных перемещений ($v_1(x)$ или $u_1(x)$). Кроме того, полученные решения должны удовлетворять заданным граничным условиям.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Власов В.З.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В.З.Власов, Н.Н.Леонтьев. М.: Физматгиз, 1960. 491 с.

2. *Господариков А.П.* Метод расчета нелинейных задач механики горных пород при подземной разработке пластовых месторождений / Санкт-Петербургский горный ин-т. СПб, 1999. 127 с.

3. *Ильюшин А.А.* Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.

4. *Красносельский М.А.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 456 с.

5. Сборник статей «Теория пластичности». М., Л., 1948. 452 с.