УДК 519.6;
004.942;
331.45

К.В. Халкечев

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОГО ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ТРЕЩИНОВАТОМ ПОРОДНОМ МАССИВЕ

Проведен анализ существующих математических моделей упругого поля напряжений в породном массиве, и доказана актуальность выбранной темы для данной статьи. Для построения математической модели упругого поля напряжений трещиноватого породного массива разработан математический метод моделирования для таких сложных сред. Введен коэффициент поврежденности на каждом структурном уровне, который позволяет учесть влияние трещин на упругие свойства породного массива.
Ключевые слова: трещиноватость, породный массив, математическая модель, упругость, поле напряжений, коэффициент поврежденности.

Математическое моделирование в рамках механики деформированного твердого тела (МТДТ) получило в геомеханике широкое развитие. К основным работам в этом направлении следует отнести следующие научные труды [1—9]. Но поскольку массив горных пород является весьма сложным объектом, то теоретические расчеты деформирования горных пород, устойчивости горных выработок и различных сооружений в породных массивах во многих случаях представляет большие трудности. Подчас возникающие задачи неразрешимы аналитическими методами особенно в рамках классической математики и МТДТ. Исследования же в натурных условиях отличаются большой трудоемкостью, дороги и, как правило, требуют длительного времени. В некоторых случаях их вообще невозможно своевременно организовать. Экспериментальные лабораторные работы не дают возможности определить свойства породного массива, так как инструментальные возможности весьма ограничены из-за непомерно больших размеров представительных объемов образцов. Поэтому остается один вариант разработать новые математические методы моделирования породных массивов. Особенно важно в качестве объекта моделирования вы-

ISSN 0236-1493. Горный информационно-аналитический бюллетень. 2016. № 8. С. 190–194.

брать упругое поле напряжений в трещиноватом породном массиве, и это проблема является весьма актуальной.

Для решения данной проблемы используем следующую классификацию трещиноватости, связанную с масштабом неоднородности [10]. Отметим, что смысл имеют только трещины завершенного масштабного уровня.

Для построения математической модели неоднородного упругого поля напряжений в породных массивах обратимся к содержательной модели структурного уровня, т.е. минерала. Деформации упругие; минерал микронеоднородный и локально анизотропный (зерна анизотропные); каждое зерно испытывает влияние остальных зерен через упругое поле; упругие свойства зерен и внешнее поле напряжений считаем известными; неизвестным считается поле напряжений внутри зерна, и непосредственно измерить его величину невозможно; в зернах имеются трещины, которые изменяют тензор модулей упругости.

На основе этой содержательной модели переходим к следующей математической модели: неограниченная упругая трехмерная анизотропная среда, которую назовем основной с неоднородностями в эллипсоидальных областях $V(x)$, где $x = (x_1, x_2, x_3)$ – точка среды. Эти эллипсоидальные области плотно прилегают друг к другу и соответствуют зернам минералов, в которых имеются трещины. Пусть $\overset{t}{C}$ – тензор упругих модулей зерна с трещиной, значения которого определены экспериментально, а C_0 – постоянный тензор упругих модулей основной среды, равный осредненным значениям тензора упругих модулей отдельного зерна $<\overset{t}{C}>$, $\overset{t}{C}_0 + \overset{t}{C}_1$ – то же для эллипсоидальной неоднородности. Тогда тензор упругих модулей среды с неоднородностями можно представить в виде кусочно-постоянной функции $\overset{t}{C}(x) = \overset{t}{C}_0 + \overset{t}{C}_1 V(x)$, где $V(x)$ – характеристическая функция области V, занятой неоднородностями, т.е. $V(x) = 1$ при $x \in V$ и $V(x) = 0$ при $x \in V$. Но так как в рассматриваемой модели неоднородности плотно прилегают друг к другу, то всегда $x \in V$, а значит $V(x) = 1$. Будем иметь в виду, что $\overset{t}{C}_1$ принимает различные значения в зависимости от ориентации эллипсоидальной неоднородности. В свою очередь, ориентация последних случайна, следовательно $\overset{t}{C}_1$ – случайный тензор, постоянный в пределах каждой неоднородности. Обозначим через $\varepsilon_0(x)$ непрерывное внешнее поле деформаций, которое существовало бы при $\overset{t}{C}_1 = 0$ в однородной основной среде при заданных внешних силах и через $\varepsilon(x)$ – кусочно-непрерывное поле деформаций в среде с неоднородностями при тех же внешних условиях.

Смещение $u_1(x)$ в этой среде с неоднородностями в произвольной аффинной системе координат удовлетворяет уравнению:

$$\partial_j[C^{ijkl}(x)\partial_k u_l(x)] = -f^i(x),\, u_i(x) \to u_i^0(x) \text{ при } x \to \infty. \quad (1)$$

Оно понимается в смысле обобщенных функций. Внешние силы $-f^i(x)$ не содержат сингулярности типа простого и двойного слоев в силу предположения о непрерывности внешнего поля деформаций. Из-за отсутствия двойных слоев решение $u(x)$ предполагается принадлежащим к классу непрерывных функций, отсутствие же простых слоев является достаточным условием для непрерывности нормальной составляющей напряжений $\sigma(x) = \overset{t}{C}(x)\varepsilon(x)$ на границе области V.

Функция Грина позволяет преобразовать дифференциальное уравнение в частных производных (1) в интегральное уравнение. Для этого применим к обеим частям последнего оператор $defG_0$ (оператор def соответствует симметризованному градиенту, G_0 – функция Грина основной среды). В результате имеем

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}^1(x) + \int_v K_{ijkl}^0(x-x')C_1^{klmn}\varepsilon_{mn}^1(x')dx' = \\ = -\int_v K_{ijkl}^0(x-x')C_1^{klmn}\varepsilon_{mn}^0 dx'\end{aligned}, \quad (2)$$

где оператор $K_0 = -defG_0def$ имеет ядро

$$K_{ijkl}^0(r-r') = \left[-\partial_i\partial_j G_{kl}^0(r-r')\right]_{(ij)(kl)}, \quad (3)$$

круглые скобки (ij), (kl) обозначают симметризацию по индексам ij и kl соответственно; G_{kl}^0 – функция Грина основной среды. Оператор является псевдодифференциальным оператором с однородным символом $K_0(\xi) \in 0_0^\infty$. В рамках псевдодифференциальных уравнений и предположений метода самосогласованного поля уравнение (1) допускает решение. В результате получаем общее выражение для определения поля напряжений σ в неоднородности при известном внешнем поле σ_0:

$$\sigma = \overset{t}{C}(I + A\overset{t}{C}_1)^{-1} < \overset{t}{C}(I + A\overset{t}{C}_1)^{-1} > \sigma_0. \quad (4)$$

Решение уравнение для определения неоднородного поля напряжений на текстурном уровне с трещинами имеет вид:

$$\sigma = \overset{t}{C}_э(I + A_э\overset{t\,э}{C_1})^{-1} < \overset{t}{C}_э(I + A_э\overset{t\,э}{C_1})^{-1} >^{-1} \sigma_0, \quad (5)$$

где $\overset{t}{C}_э = \overset{n}{C} + \overset{p}{k} P$ — тензор эффективных упругих модулей структурного уровня с коэффициентом поврежденности $\overset{p}{k}$ и вспомогательным четырехвалентным тензором P; (< >) — знак усреднения по ансамблю полей неоднородностей.

Аналогично получено решение для поля напряжений в породно-массивном уровне

$$\sigma = \overset{t}{C}_{эf}(I + A_{эf}\overset{t\ эf}{C_1})^{-1} < \overset{t}{C}_{эf}(I + A_{эf}\overset{t\ эf}{C_1})^{-1} >^{-1} \sigma_0 , \qquad (6)$$

где $A_{эf}$ — среднее значение на единичной сфере Фурье — образа тензорной функции Грина основной среды; $\overset{t}{C}_{эf}$ — эффективные свойства текстурного уровня. Совокупность моделей (4)—(6) дают упругое поле напряжений в нетронутом трещиноватом породном массиве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chen Z., Zhao D.-A., Yu Y.* The interaction mechanism of surrounding rock and supporting structure in high geostress extrusion fault // Advanced Materials Research. — Haikou, 2011. —Vol. 243—249. — P. 3588—3598.

2. *Tian T., Zhang Y.-L., Ma Y.-L.* Simulation research on in-situ rock stress of mining coal in gently-dipping close-range low coal seam // Rock Stress and Earthquakes — Proceedings of the 5th International Symposium on In-Situ Rock Stress. — Beijing, 2010. — P. 315—319.

3. *Zhang Y., Li W., Li J.* The tunnel of small interval clip rock mechanics properties research // Applied Mechanics and Materials. — Yantai, 2012. — Vol. 170—173. — P. 1816—1819.

4. *Lurie S., Volkov-Bogorodskii D., Tuchkova N.* Exact solution of Eshelby—Christensen problem in gradient elasticity for composites with spherical inclusions. — Vienna, 2012. — P. 1—12.

5. *Shen B., Stephansson O., Rinne M.* Modelling Rock Fracturing Processes. A Fracture Mechanics Approach Using FRACOD. — Dordrecht: Springer, 2014. — 173p.

6. *Ohnaka M.* The Physics of Rock Failure and Earthquakes. — Cambridge: Cambridge University Press, 2013. — 270p.

7. *Господариков А.П., Зацепин М.А.*Математическое моделирование прикладных задач механики горных пород и массивов // Записки горного института. — 2014. — Т. 207. — С. 217—221.

8. *Господариков А.П., Максименко М.В.* Об одном подходе к исследованию напряженно-деформированного состояния массива горных пород с учетом нелинейного характера процесса их деформирования // Записки горного института. — 2013. — Т. 205. — С. 60—63.

9. *Булычев Н.С., Комаров Д.С.* Выбор и обоснование модели массива соляных пород для верхнекамского месторождения // Известия тульского государственного университета. Науки о земле. — 2012. — № 1. — С. 155—162.

10. *Халкечев К.В.* Иерархия случайно-фрактальных моделей разрушения конструкционных материалов // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2006. — т. 13. — Вып. 3. — С. 409—433. ГИАБ

КОРОТКО ОБ АВТОРЕ

Халкечев Кемал Владимирович – доктор физико-математических наук,
доктор технических наук, профессор, e-mail: h_kemal@mail.ru,
НИТУ «МИСиС».

Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten'. 2016. No. 8, pp. 190–194.

UDC 519.6; 004.942; 331.45

K.V. Khalkechev

MATHEMATICAL MODELING OF ELASTIC FIELD OF TENSION IN JOINTED ROCK MASSIF

In this work the analysis of the existing mathematical models of the tension elastic field in the rock massif is carried out, and relevance of the chosen subject for this article is proved. For creation of mathematical model of the tension elastic field of the jointed rock massif the mathematical method of modeling is developed for such difficult environments. The damage coefficient at each structural level which allows to consider influence of cracks on elastic properties of the rock massif is entered.

Key words: jointing, rock massif, mathematical model, elasticity, field of tension, damage coefficient.

AUTHOR

Khalkechev K.V., Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: h_kemal@mail.ru,
National University of Science and Technology «MISiS»,
119049, Moscow, Russia.

REFERENCES

1. Chen Z., Zhao D.-A., Yu Y. The interaction mechanism of surrounding rock and supporting structure in high geostress extrusion fault. *Advanced Materials Research*. Haikou, 2011. Vol. 243–249, pp. 3588–3598.

2. Tian T., Zhang Y.-L., Ma Y.-L. Simulation research on in-situ rock stress of mining coal in gently-dipping close-range low coal seam. *Rock Stress and Earthquakes Proceedings of the 5th International Symposium on In-Situ Rock Stress*. Beijing, 2010, pp. 315–319.

3. Zhang Y., Li W., Li J. The tunnel of small interval clip rock mechanics properties research. *Applied Mechanics and Materials*. Yantai, 2012. Vol. 170–173, pp. 1816–1819.

4. Lurie S., Volkov-Bogorodskii D., Tuchkova N. *Exact solution of Eshelby–Christensen problem in gradient elasticity for composites with spherical inclusions*. Vienna, 2012, pp. 1–12.

5. Shen B., Stephansson O., Rinne M. Modelling Rock Fracturing Processes. *A Fracture Mechanics Approach Using FRACOD*. Dordrecht: Springer, 2014. 173p.

6. Ohnaka M. *The Physics of Rock Failure and Earthquakes*. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. 270p.

7. Gospodarikov A.P., Zatsepin M.A. *Zapiski gornogo instituta,* t. 207 (Proceedings of the mining institute, vol. 207), 2014, pp. 217–221.

8. Gospodarikov A.P., Maksimenko M.V. *Zapiski gornogo instituta*, t. 205 (Proceedings of the mining institute, vol. 205), 2013, pp. 60–63.

9. Bulychev N.S., Komarov D.S. *Izvestiya tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Nauki o zemle*. 2012, no 1, pp. 155–162.

10. Khalkechev K.V. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki*. 2006, vol. 13, issue 3, pp. 409–433.