

# СТОХАСТИЧЕСКОЕ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ВОДОНОСНЫХ СВОЙСТВ НЕОДНОРОДНЫХ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ СРЕД НА ОСНОВЕ ФРАКТАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Олег Александрович Дышин,  
engakadem@gmail.com  
Фуад Фархад оглы Магеррамов  
oilqazgeology@gmail.com

Азербайджанский государственный университет нефти  
и промышленности  
Азербайджан, Баку

**Актуальность работы** обусловлена необходимостью использования при описании процесса фильтрации потока флюидов в нефтеносных пластах и грунтовых водах случайных процессов, основанных на Леви-распределении, более точно описывающих процесс фильтрации, чем фрактальное броуновское движение  $fBm$  и фрактальный гауссовский шум  $fGn$ , особенно при резких изменениях геологической среды.

**Цель работы:** показать преимущества использования в геостатистике стохастических методов интерполирования по сравнению с детерминистскими методами (в частности, кригинг-метода).

**Методология исследования:** теоретический анализ и экспериментальное исследование методов вероятностного моделирования водоносных свойств геологических сред в условиях неопределенности и ограниченности доступной информации о проницаемости и пористости пластов.

**Результаты.** Показано, что для моделирования дисперсионных характеристик неоднородных геологических формаций наиболее подходящим является стохастическое интерполирование. Использование при описании процесса фильтрации флюидов предположение о гауссовском распределении является необоснованным, особенно при наличии резких изменений, присущих геологическим стратификациям. Такие изменения более адекватно описываются фрактальным Леви-движением  $fLm$ . Устойчивое Леви-распределение приращений исследуемых фильтрационных характеристик нефтенасыщенных залежей показало хорошее совпадение с эмпирическими данными многочисленных физических изменений геологических структур в широком диапазоне пространственных переменных по вертикали и горизонтали.

**Выводы.** Использование  $fLm$ -моделей представляет принципиально новый подход в геостатистике. Наличие «тяжелых хвостов» Леви-распределения приращений фильтрационных характеристик пластов и скейлинговое распределение параметров данного распределения позволяет реагировать на внезапные и резкие изменения свойств породы, эффективно воспроизводя напластования и осадочные отложения на поверхности пласта, характеризуя неоднородности в широком диапазоне распределения пространственных переменных.

**Ключевые слова:** гидравлическая проводимость; пористость; проницаемость; фрактальные процессы в геологии; стохастическое интерполирование; фрактальное броуновское движение; фрактальный гауссовский шум; фрактальное Леви-движение; показатель Херста; тяжелые хвосты распределения.

## Введение

Систематическое изучение и разработка методов вероятностного моделирования водоносных свойств геологических сред является важной и актуальной проблемой. Построение прогнозных моделей фильтрации потока флюидов требует, прежде всего, использования информации о проницаемости и пористости пластов, в то время как возможность измерения этих свойств ограничена небольшим количеством пробных значений в некоторых доступных участках исследуемой пространственной области. В условиях такой неопределенности информации использование классического подхода, связанного с применением гладкого сглаживания (например, кригинг-метода), становится неудовлетворительным, поскольку в этом случае глобальный перенос свойств гидравлической проводимости (водоносности) дает строго детерминированное описание фильтрационного потока, которое не может предвидеть интервалы с высокой проницаемостью потока и барьеры с низкой проницаемостью. Оценка наиболее вероятного значения проницаемости в каждой точке области просто недостаточна, так как правдоподобное интерполирование должно учитывать экстремумы распределения проницаемости. Эта проблема становится еще более сложной при высокой вариабельности, присущей седиментарным геологическим образованиям. Проницаемость не является гладко изменяющейся функцией пространственной точки, она может увеличиваться или уменьшаться скачками с разными амплитудами. В силу указанных причин геостатистические оценки, полученные с помощью гладкого сглаживания, не могут выявлять внутренние неоднородности.

Для моделирования дисперсионных характеристик неоднородных геологических формаций стохастическое интерполирование является наиболее подходящим методом. Стохастический подход к интерполированию связан с вычислением значений процесса между его измеренными значениями и использованием случайной функции, имеющей структуру вариации, близкую к исходной.

Раньше стохастическое интерполирование, используемое при описании процессов фильтрации потоков флюидов в нефтеносных пластах и грунтовых водах, было основано на фрактальном броуновском движении (*fractal Brownian motion* –  $fBm$ ) или на его приращениях – фрактальном гауссовском шуме (*fractal Gaussian noise* –  $fGn$ ) [1, 2]. Эти модели определяются с помощью гауссовского распределения и могут в некоторых случаях хорошо описывать геологические формации. Однако в общем случае предположение о гауссовском распределении является необоснованным, особенно при наличии резких изменений свойств, присущих геологическим стратификациям. Наиболее адекватно такие изменения описываются фрактальным Леви-движением (*fractal Levi motion* –  $fLm$ ), основанным на устойчивом Леви-распределении, которое только в частном случае совпадает с гауссовским (нормальным) распределением [3, 4].  $fBm$ -модель является частным случаем более широкого класса  $fLm$ -моделей [5].

### 1. Фрактальные процессы в геологии

При моделировании процесса фильтрации потока флюидов в резервуарах нефтегазовых залежей возникает проблема исследования фрактальных свойств временных рядов, представляющих наблюдаемые значения показателей пористости и проницаемости [6–9]. Такого рода исследования связаны с понятием фрактального (самоподобного) случайного процесса.

Фрактальным (в широком смысле) случайным процессом называется процесс, корреляционная функция  $R_x(t_1, t_2)$  которого равна с точностью до множителя  $a'$  корреляционной функции процесса, сжатого в  $a$  раз:

$$R_x(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = a'R_x(at_1, at_2). \tag{1}$$

В случае стационарного фрактального процесса выражение (1) имеет вид:

$$R_x(\tau) = E[X(t+\tau)X(t)] = a'E[X(a(t+\tau))X(at)] = a'R_x(a\tau), \tag{2}$$

где  $E$  – знак математического ожидания.

Выражение (2) можно рассматривать как уравнение самоподобия, решением которого является степенная функция

$$R_x(\tau) = C_0\tau^\alpha, \alpha > 0.$$

Фрактальными процессами такого типа являются, в частности:

1) классическое броуновское движение (*classic Brownian motion – cBm*), характеризующее процесс случайного блуждания (*random walk*), или так называемый винеровский процесс. Математическое ожидание этого процесса определяется выражением

$$E[X(t_2) - X(t_1)] = \sqrt{2/\pi} \cdot \sigma |t_2 - t_1|^{1/2},$$

где  $\sigma$  – стандартное отклонение процесса.

Любое приращение реализации *cBm*-процесса обладает свойством статистической самоаффинности

$$X(t + \Delta t) - X(t) \triangleq 1/\sqrt{r} (X(t + r\Delta t) - X(t)),$$

так как статистическая идентичность в этом случае достигается различным масштабированием сигнала по оси абсцисс и по оси ординат (соответственно в  $r$  и  $\sqrt{r}$  раз). Символ  $\triangleq$  означает, что две случайные величины имеют одинаковое распределение и, в частности, одни и те же математическое ожидание и дисперсию;

2) обобщенное (фрактальное) броуновское движение (*fractional Brownian motion – fBm*), для которого

$$E[X(t_2) - X(t_1)] = \sqrt{2/\pi} \cdot \sigma |t_2 - t_1|^H,$$

где  $0 < H < 1$  – параметр Херста. Приращение этого процесса обладает свойством статистической самоаффинности:

$$X(t + \Delta t) - X(t) \triangleq 1/H (X(t + r\Delta t) - X(t)),$$

для любого  $r > 0$ . При  $H = 1/2$  *fBm* совпадает с *cBm*.

3) производная фрактального броуновского движения, называемая фрактальным гауссовским шумом (*fractional Gaussian noise – fGn*).

Корреляционная функция фрактального гауссовского шума описывается выражением

$$R_x(\tau) \sim \begin{cases} H(2H-1)|\tau|^{2H-2} & \text{при } H \neq 0,5, \\ \delta(\tau) & \text{при } H = 0,5, \end{cases}$$

где  $\delta(\tau)$  – функция Дирака.

При  $0,5 < H < 1$  процесс  $X(t)$  характеризуется спектральной мощностью (СМ), которая описывается выражением

$$S_x(f) \sim 1/2^\beta, \quad 0 < \beta < 1,$$

где  $\beta = 2H - 1$  для *fGn* и  $\beta = 2H + 1$  для *fBm*.

Наряду с ковариационной и корреляционной функциями случайного процесса  $g$  важным его показателем является вариограмма (*variogram*) или полувариограмма (*semivariogram*), которая определяется как

$$\gamma(l) = \langle \{g_j(k) - g_{j+l}(k)\}^2 \rangle / 2,$$

где  $g_j$  – значение  $k$ -й реализации процесса в  $j$ -й точке;  $l$  – лаг независимой переменной;  $\langle \cdot \rangle$  – усреднение по ансамблю траекторий случайного процесса  $g$ .

При  $0 < H < 0,5$  ( $-1 < \beta < 0$ ) процесс не имеет конкретной СМ, а при  $H = 0,5$  ( $\beta = 0$ ) он превращается в белый гауссовский шум.

Процессы  $fBm$  и  $fGn$  взаимосвязаны. Если  $m_1, m_2, m_3, m_4, \dots$  представляют собой последовательность с шагом  $\Delta t$  по времени значений  $fBm$ -процесса, то последовательность  $[(m_2 - m_1), (m_3 - m_2), (m_4 - m_3), (m_5 - m_4) \dots]/\Delta t$  представляет последовательность значений  $fGn$ -процесса. И наоборот, если  $n_1, n_2, n_3, n_4, \dots$  есть последовательность значений  $fGn$ -процесса с шагом  $\Delta t$  по времени, то  $[n_1, n_1 + n_2, n_1 + n_2 + n_3, \dots]\Delta t$  образует последовательность значений  $fBm$ -процесса.

Вопросы моделирования распределения пористости и проницаемости в двух- и трехмерном пространстве с применением фрактальных процессов типа  $fGn$  и  $fBm$  рассмотрены подробно в работе [10].

## 2. Геостатистические методы интерполирования

В геостатистике используются два подхода к интерполированию: детерминистский и стохастический. Наиболее распространенным детерминистским методом является процедура, называемая *кригинг-методом*, которая основана на вариограмме и используется при оценке показателей резервуара в случае условного моделирования потока флюидов для предсказания наиболее правдоподобного значения концентрации флюида в рассматриваемой окрестности [11]. Данная процедура осуществляет сглаженную интерполяцию, обеспечивая наилучшую оценку значения исследуемого процесса в заданной окрестности, и приводит к более гладкой структуре вариации, чем у исходного распределения процесса.

В случае присутствия тренда (т. е. систематического изменения наблюдаемой величины с изменением координаты) в данных измерений предположение о стационарности наблюдений величины неправомерно. Систематический пространственный тренд должен быть промоделирован и удален из данных измерений до построения вариограмм. Иначе вариограммы будут воспроизводить крупномасштабный тренд, что приведет к потере собственной корреляции наблюдаемой величины на более мелком масштабе. Более того, вариограмма данных, имеющих систематический тренд, будет нестационарна и потому не может быть использована в геостатистических моделях кригинга.

После моделирования пространственного тренда  $m(x)$  и корреляционной структуры невязок  $R(x) = Z(x) - m(x)$  к полученной интерполяционной оценке невязок добавляется пространственный тренд для получения итогового значения  $Z(x)$ .

Для моделирования дисперсионных характеристик неоднородных геологических формаций наиболее подходящим методом является стохастическое интерполирование.

Для интерполирования пористости скважин обычно используется процедура, основанная на использовании фрактального броуновского движения  $fBm$ , которая состоит из следующих шагов [1].

1. Проводят статистический анализ данных измерения пористости в вертикальном направлении и проверяют возможность использования для их описания процесса  $fGn$ .

2. В случае положительного результата на основе этих данных вычисляют значение показателя Херста  $H$ .

3. На основе полученного значения  $H$  строят процесс  $fBm$  для значений пористости, распределенных в горизонтальном направлении.

4. Вычисляют значения пористости скважин на каждой глубине  $z$ , генерируя процесс  $fBm$  по этим значениям пористости с учетом значения величины  $H$ , определенного на шаге 2.

На шаге 2 процедуры вычисляются значения показателя Херста с использованием так называемого *анализа ремасштабирования размаха* (rescaled range ( $R/S$ ) analysis).

Первоначально  $R/S$ -анализ был применен к ряду  $F_1, F_2, F_3, \dots$  годовых объемов притока в резервуар, который аппроксимировался  $fGn$ -процессом.

Обозначим через  $CF_i = \sum_{j=1}^i F_j$  кумулятивную (накопленную) к году  $i$  сумму этого ряда.

Пусть известна предыстория этого процесса за  $n$  предыдущих лет, начиная с времени  $t$ , когда запас резервуара равнялся  $S$ , и кончая временем  $t_n$ , когда запас снова стал равным  $S$ . Трендовая линия эмпирических данных  $CF(t_n)$ ,  $t_n = t + n\Delta t$  (обозначим ее  $TL$ ) задается уравнением

$$TL = CF(t) + \frac{u}{n\Delta t} [CF(t_n) - CF(t)], u = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Пусть  $M$  и  $|m|$  – максимальное положительное (выше  $TL$ ) отклонение  $CF(t)$  и максимальное отрицательное (ниже  $TL$ ) отклонение и  $R = M + |m|$ . Пусть далее,  $z$  – независимая переменная (высота над уровнем моря), описываемая  $fBm$ -или  $fGn$ -процессом;  $\Delta z$  – расстояние между двумя значениями  $z$ ;  $n\Delta z$  ( $n = 3, 4, \dots$ ) – лаг, с которым вычислены значения  $R$  и  $S$ , равные  $R(z, n\Delta z)$  и  $S(z, n\Delta z)$  соответственно. При условии, что исследуемый ряд  $\{F_j\}$  описывается  $fBm$ -процессом, выполняется предельное соотношение [12]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ (n\Delta z)^{-H} R(z, n\Delta z) / S(z, n\Delta z) \right] = \text{const.} \quad (3)$$

Из (3) следует, что при достаточно большом  $n$  зависимость  $\ln(R/S)$  от  $\ln(n\Delta z)$  будет изображаться прямой линией с углом наклона  $\phi$ , таким, что  $\text{tg } \phi = H$ .

Если исследуемый ряд описывается  $fBm$ -процессом, то  $R/S$ -процедура выполняется непосредственно. Если же этот ряд описывается  $fGn$ -процессом, то до вычисления значений  $R/S$  необходимо редуцировать его в  $fBm$ -процесс, производя простое численное интегрирование последовательности  $n_1, n_2, n_3, \dots$  значений  $fGn$ -процесса в последовательность  $[n_1, n_1 + n_2, n_1 + n_2 + n_3, \dots]\Delta t$ , представляющую  $fBm$ -процесс.

Таким образом, сначала ряд тестируется на  $fBm$  или  $fGn$ -процесс путем проверки линейной зависимости ( $\ln(R/S)$ ,  $\ln(n\Delta z)$ ), после чего определяется коэффициент  $H$  по углу наклона графика этой зависимости.

Значения величины  $R/S$ , полученные для каждого лага  $n\Delta z$ , вычисляются по формулам:

$$R(z, n\Delta z) = \max_{0 \leq u \leq n\Delta z} \left\{ GF(z+u) - \left[ GF(z) + \frac{u}{n\Delta z} (GF(z+u) - GF(z)) \right] \right\} -$$

$$- \min_{0 \leq u \leq n\Delta z} \left\{ GF(z+u) - \left[ GF(z) + \frac{u}{n\Delta z} (GF(z+u) - GF(z)) \right] \right\},$$

$$S(z, n\Delta z) = \left\{ \frac{1}{n\Delta z - 1} \sum_u GF^2(z+u) - \frac{1}{(n\Delta z)^2 - n\Delta z} \left[ \sum_u GF(z+u) \right]^2 \right\}^{1/2}.$$

Здесь  $GF(z_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  ( $m$  – число точек по вертикали, т. е. число рассматриваемых уровней глубины  $z$ ) означают кумулятивные суммы ряда  $\{F_j\}$  на глубинах  $z_j$ , которые вычисляются по формулам

$$GF(z_i) = \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\ln(K_{ij}) - \mu_{in}}{\sigma_{in}} \right], i = 1, 2, \dots, m,$$

где  $K_{ij}$  – заданное значение гидравлической проводимости на глубине  $z_i$  в горизонтальных точках  $j$  между двумя разведочными скважинами;  $\mu_{in}$ ,  $\sigma_{in}$  – средние и дисперсия ряда  $K_{ij}$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Для интерполирования значения  $K_{ij}$  применим метод стохастической интерполяции. Наиболее распространенным является метод последовательных случайных дополнений (Successive Random Additions – SRA) [13]. В этом методе значения процесса гладко интерполируются в промежуточных точках между скважинами, при этом ко всем проинтерполированным значениям добавляются случайные числа так, чтобы вариация приращений удовлетворяла свойству

$$E[\Delta m_H(r\Delta t)]^2 = r^{2H} E[\Delta m_H(\Delta t)]^2. \tag{4}$$

Случайные вариации, удовлетворяющие уравнению (4), добавляются ко всем значениям. Для того чтобы проинтерполировать значения с корреляционной структурой, присущей  $fBm$ -процессу, начинают с известной дисперсии  $\sigma_0^2$  между двумя скважинами и добавляют к гладко интерполируемым значениям случайное число, генерируемое датчиком независимых значений с распределением  $N(0, \sigma_1^2)$ , где  $\sigma_1^2 = \sigma_0^2 / 2^{2H}$ . Эта процедура повторяется до тех пор, пока интерполируемые значения будут описываться  $fBm$ -процессом. На  $n$ -м шаге этой рекурсивной процедуры случайная вариация, добавляемая к каждому интерполируемому значению, равна

$$\sigma_{n+1}^2 = \sigma_n^2 / 2^{2H} = \sigma_0^2 / 2^{2nH}.$$

### 3. Стохастическое интерполирование на основе фрактального Леви-движения

Раньше стохастические методы интерполирования фильтрационных характеристик нефтегазовых залежей проводились в основном с использованием фрактального броуновского движения  $fBm$ , являющегося обобщением классического броуновского движения  $sBm$ , и фрактального гауссовского шума  $fGn$  – производной от  $fBm$ , которые основаны на гауссовском (нормальном) распределении [12]. В последнее время в геостатистике широко применяются более общие методы интерполирования с использованием фрактального движения Леви (fractional Levy motion –  $fLm$ ), основанного на негауссовском устойчивом распределении Леви, частным случаем которого является гауссовское распределение. Анализ геологических данных осадочных пород показывает, что изменения свойств их поверхностных слоев с большей точностью описываются масштабнo-инвариантными моделями на основе  $fLm$ , приводя к тому же к состоятельным оценкам, т. е. точечным оценкам, сходящимся по вероятности [3, 4].

Устойчивые Леви-распределения параметризуются с помощью индекса Леви  $0 < \alpha \leq 2$  и включают как частный случай гауссовы распределения при  $\alpha = 2$ . При  $\alpha \neq 2$  устойчивые Леви-распределения имеют медленно и далеко простирающиеся (так называемые «тяжелые») хвосты ( $P_r(|x| \geq s) \propto s^{-\alpha}$  для больших  $s$  и бесконечные моменты второго (и более высокого) порядка.

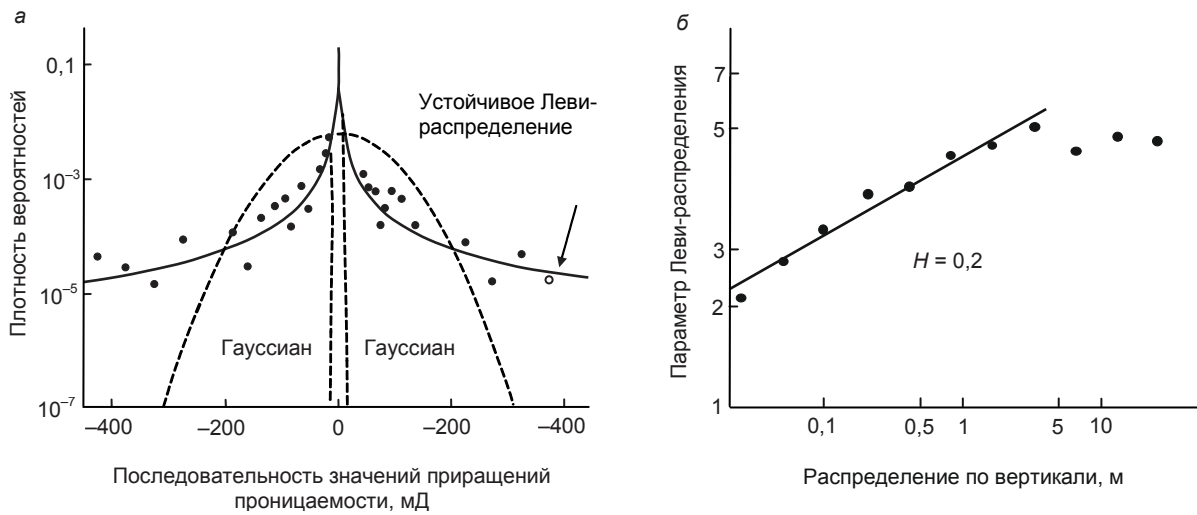
К тому же устойчивые Леви-распределения являются предельными распределениями сумм независимых одинаково распределенных (*n. o. p.*) случайных величин с бесконечной дисперсией, что является обобщением центральной предельной теоремы, которая справедлива в случае *n. o. p.* случайных величин с конечной дисперсией. Симметрическое Леви-распределение центрировано относительно начала координат и имеет функцию плотности распределения (*probability density function – PDF*)

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp(-|C_k|^a) \cos(kx) dk.$$

В  $fLm$ -модели процесса  $X(t)$  его приращения  $X(t+l) - X(t)$  имеют симметрическое Леви-распределение с индексом  $\alpha$  и шириной  $C = C_0 |l|^H$ . В случае независимых приращений масштабный параметр  $H = 1/\alpha$ . При  $H \neq 1/\alpha$  приращения имеют бесконечно-временную корреляцию, при этом в случае  $1/\alpha < H < 1$  имеет место персистентность (сохранение возрастающей тенденции), а в случае  $0 < H < 1/\alpha$  – антиперсистентность (смена возрастающей тенденции убывающей).

Характерная гистограмма приращения последовательных значений проницаемости  $K$  дана на рис. 1[14].





**Гистограмма приращения последовательных значений проницаемости  $K$ .** а – гистограмма приращений  $\Delta K$  для последовательных значений проницаемости, описываемых устойчивым Леви-распределением с  $\alpha = 0,65$  и  $C = 2,12$ . Значения  $K$ , измеренные в горизонтальном направлении между скважинами E7 и E8 на слоях 2, 4 и 6 с шагом  $l = 0,025$  м. Две разрывные линии соответствуют гауссовой аппроксимации. б – зависимость структурной функции Леви  $C(l)$  от  $l$  для измеренных значений проницаемости. Прямая линия, характеризующая график этой зависимости в двойных логарифмических координатах, указывает наличие степенного закона  $C(l) \propto l^H$  и иллюстрирует хорошую аппроксимацию в достаточно широком диапазоне пространственного масштаба, подчеркивая скейлинговое поведение. Наклон этой прямой  $H = 0,2$  показывает антиперсистентность процесса.  
**Histogram of increment of successive values of permeability  $K$ .**

Квантильные оценки параметров  $C$  и  $\alpha$  получены Фама и Роллем [15].

$fLm$ -модели могут быть обобщены на случай двух и трех измерений. По существу, такое обобщение получается заменой переменной  $t$  на вектор позиции  $\vec{r}$ , введением вектора  $\vec{l}$  расстояния. Используя растяженное евклидово расстояние  $|\vec{l}| = [(S_x l_x)^2 + (S_y l_y)^2 + l_z^2]^{1/2}$  с факторами растяжения  $S_x, S_y < 1$ , получим распределение приращений с большей шириной  $C$  в вертикальном направлении по сравнению с горизонтальными направлениями, согласованное с вариациями процесса на поверхностях напластования породы пласта. Такой подход предполагает одно и то же значение параметра  $H$  в оценке  $C(l)$  по всем трем направлениям координатных осей и приводит к простейшей модели, согласованной с геологическими данными, которая рассмотрена Паинтером [14]. Однако эту модель можно обобщить на случай различных значений  $H$  в разных направлениях.

**Полученные результаты и их применение**

В результате проведенных исследований дано обоснование необходимости применения устойчивого Леви-распределения для стохастического интерполирования фильтрационных характеристик нефтенасыщенных сред. Показано, что фрактальное Леви-движение более адекватно описывает резкие изменения геологических стратификаций.

**Заключение**

Использование  $fLm$ -моделей представляет принципиально новый подход к описанию фильтрационных характеристик нефтенасыщенных залежей. Существенно важное преимущество этих моделей состоит в том, что устойчивое Леви-распределение приращений исследуемых характеристик и их скейлинговое поведение показало хорошее совпадение с эмпирическими данными [16, 17]. Немаловажную роль здесь играет наличие «тяжелых» хвостов Леви-устойчивого распределения приращений, которые реагируют на резкие внезапные изменения свойств породы, эффективно воспроизводя геологические стратификации. Кроме того, скейлинговое поведение параметров данного распределения в вертикальном и горизонтальном направлениях характеризует присутствие неоднородностей в широком диапазоне пространственных переменных, которые часто визуалью наблюдаются в виде осадочных отложений на поверхности пласта. Значения скейлинговых параметров, отражающие антиперсистентное поведение процесса, позволяют модели регистрировать случайные пики спектра или «псевдоциклы», выявляя тем самым ритмический характер наслоений породы.

**ЛИТЕРАТУРА**

- Hewett T. A. Fractal distributions of reservoir heterogeneity and their influence on fluid transport // Proceeding of the 61<sup>st</sup> Annual Technical Conference of the Society of Petroleum Engineers. Richardson: Soc. Pet. Eng., Tex., 1986.
- Moltz F. J., Boman G. K. A fractal-based stochastic interpolation scheme in subsurface hydrology // Water Resources Research. 1993. Vol. 29(11). P. 3769–3774.
- Painter S., Paterson L. Fractional Levy motion as a model for spatial variability in sedimentary rock // Geophysical Research Letters. 1994. Vol. 21(25). P. 2857–2860.
- Painter S. Evidence for non-Gaussian scaling behavior in heterogeneous sedimentary formations // Water Resources Research. 1996. Vol. 32(5). P. 1183–1195.
- Taqqu M. S. Random processes with long-range dependence and high-variability // Journal of Geophysical Research. 1987. Vol. 92(D8). P. 9683–9686.
- Bird N., Diaz M. C., Saa A., Tarquis A. M. Fractal and multifractal analysis of pore-scale images of soil // Journal of Hydrology. 2006. Vol. 322. P. 211–219.
- Сулейманов Б. А., Исмаилов Ф. С., Дышин О. А., Гусейнова Н. И. Анализ состояния разработки нефтяного месторождения на основе мультифрактального подхода // Нефтяное хозяйство. 2011. № 2. С. 92–96.

8. Сулейманов Б. А., Исмаилов Ф. С., Дышин О. А., Гусейнова Н. И. Определение фрактальной размерности фронта вытеснения нефти водой на основе данных нормальной эксплуатации скважин // Нефтяное хозяйство. 2011. № 12. С. 84–88.
9. Курбанов Р. А., Дышин О. А., Панахова Н. Д. Колебания на фрактальной дефектной структуре упругого твердого тела // Вестник Азербайджанской инженерной академии. 2015. Т. 7, № 1. С. 17–28.
10. Hardy H. H., Beier R. A. Fractals in reservoir engineering. Singapore; N. Y.; London; Hong Kong: World Scientific, 1994. 359 p.
11. Демьянов В. В., Савельева Е. А. Геостатистика: теория и практика. М.: Наука, 2010. 327 с.
12. Mandelbrot B. B. Limit theorems on the self-normalized range for weakly and strongly dependent processes // Zeitschrift fur Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete. 1975. Vol. 31. P. 271–285.
13. Molz E. J., Boman G. K. A Fractal-Based Stochastic Interpolation Scheme in Subsurface. Hydrology // Water Resources Research. 1993. Vol. 29, № 11. P. 3769–3774.
14. Painter S. Stochastic interpolation of aquifer properties using fractional Levy motion // Water Resources Research. 1996. Vol. 32, № 5. P. 1323–1332.
15. Fama E., Roll R. Parameter estimates for symmetric stable distributions // Journal of the American Statistical Association. 1971. Vol. 66. P. 331–338.
16. Смирнов В. В., Спиридонов Ф. Ф. Фрактальные модели стохастических процессов // Южно-Сибирский научный вестник. 2013. № 1(3). С. 99–102.
17. Bianchi A., Cristadoro G., Lenci M., Ligab M. Random walks in a one-dimensional Levy Random Environment // Journal of Statistical Physics. 2016. № 163. P. 22–40.

*Статья поступила в редакцию 30 января 2018 г.*

# Stochastic interpolation of aquifer properties of heterogeneous geologic media using fractal processes

Oleg Aleksandrovich Dyshin,  
engakadem@gmail.com  
Fuad Farkhad ogly Magerramov,  
oilqazgeology@gmail.com

Azerbaijan State University of Oil and Industry  
Baku, Azerbaijan

**The relevance of the work** is conditioned by the need to use random processes based on Levi-distribution in describing the process of filtration of fluid flow in oil reservoirs and groundwater. These processes describe the filtration process more accurately than the fractal Brownian motion (*fBm*) and fractal Gaussian noise (*fGn*), especially with sharp changes in the geological environment.

**The purpose of the work** is to show the advantages of using stochastic interpolation methods in geostatistics as compared to deterministic methods (in particular, the creaking method).

**Research methodology:** theoretical analysis and experimental study of methods for probabilistic modeling of aquifer properties of geological media under conditions of uncertainty and limited availability of information on permeability and porosity of reservoirs.

**Results.** It is shown that stochastic interpolation is most suitable for modeling dispersion characteristics of heterogeneous geological formations. The use of the assumption of Gaussian distribution in describing the process of fluid filtration is unreasonable. It is especially unreasonable in the presence of abrupt changes inherent in geological stratifications. Such changes are more adequately described by fractal Levi-motion (*fLm*). Stable Levi-distribution of increments of the studied filtration characteristics of oil-saturated deposits showed a good coincidence with empirical data of numerous physical changes of geological structures in a wide range of spatial variables vertically and horizontally.

**Conclusions.** The use of *fLm* – models represents a fundamentally new approach in geostatistics. The presence of heavy tails of the Levi-distribution of increments of the filtration characteristics of the layers and scaling the distribution parameters of this distribution allows us to react to sudden and sharp changes in rock properties. This effectively reproduces the strata and sedimentary deposits on the reservoir surface and characterizes heterogeneity in a wide range of distribution of spatial variables.

**Keywords:** hydraulic conductivity; porosity; permeability; fractal processes in geology; stochastic interpolation; fractal Brownian motion; fractal Gaussian noise; fractal Levy-motion; Hurst exponent; heavy distribution tails.

## REFERENCES

1. Hewett T. A. 1986, Fractal distributions of reservoir heterogeneity and their influence on fluid transport. *Proceeding of the 61<sup>st</sup> Annual Technical Conference of the Society of Petroleum Engineers*. Richardson, Soc. Pet. Eng., Tex.
2. Moltz F. J., Boman G. K. 1993, A fractal-based stochastic interpolation scheme in subsurface hydrology. *Water Resources Research*, vol. 29, pp. 3769–3774.
3. Painter S., Paterson L. 1994, Fractional Levy motion as a model for spatial variability in sedimentary rock. *Geophysical Research Letters*, vol. 21, pp. 2857–2860.
4. Painter S. 1996, Evidence for non-Gaussian scaling behavior in heterogeneous sedimentary formations. *Water Resources Research*, vol. 32, no. 5, pp. 1183–1195.
5. Taggi M. S. 1987, Random processes with long-range dependence and high variability. *Journal of Geophysical Research*, vol. 92, pp. 9683–9686.
6. Bird N., Diaz M. C., Saa A., Tarquis A. M. 2006, Fractal and multifractal analysis of pore-scale images of soil. *Journal of Hydrology*, vol. 322, pp. 211–219.
7. Suleimanov B. A., Ismailov F. S., Dyshin O. A., Huseynova N. I. 2011, *Analiz sostoyaniya razrabotki nefryanogo mestorozhdeniya na osnove multifraktal'nogo podkhoda* [Analysis of development of oil deposits on the basis of the multifractal approach]. *Neftyanoye khozyaystvo* [Oil Industry], no. 2, pp. 92–96.
8. Suleimanov B. A., Ismailov F. S., Dyshin O. A., Huseynova N. I. 2011, *Opredefeniye fraktal'noy razmernosti fronta vytesneniya nefi vodoy na osnove dannykh normal'noy ekspluatatsii skvazhin* [Determining the fractal dimension of the displacement front of oil by water on the basis of the normal operation of wells]. *Neftyanoye khozyaystvo* [Oil Industry], no. 12, pp. 84–88.
9. Kurbanov R. A., Dyshin O. A., Panahov, Head N. D. 2015, *Kolebaniya na fraktal'noy defektnoy strukture uprugogo tvyordogo tela* [Fluctuations in the fractal defective structure of elastic solids]. *Vestnik Azerbaydzhanskoy inzhenernoy akademii* [Herald of the Azerbaijan Engineering Academy], vol. 7, no. 1, pp. 17–28.
10. Hardy H. H., Beier R. 1994, *Fractals in reservoir engineering*. Singapore; N. Y.; London; Hong Kong, 379 p.
11. Demyanov V. V., Savelyeva E. A. 2010, *Geostatistika: teoriya i praktika* [Geostatistics: theory and practice], Moscow, 327 p.
12. Mandelbrot B. B. 1975, Limit theorems on the self-normalized range for weakly and strongly dependent processes. *Zeitschrift fur Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, vol. 31, pp. 271–285.
13. Molz E. J., Boman G. K. 1993, A Fractal-Based Stochastic Interpolation Scheme in Subsurface. Hydrology. *Water Resources Research*, vol. 29, no. 11, pp. 3769–3774.
14. Painter S. 1996, Stochastic interpolation of aquifer properties using fractional Levy motion. *Water Resources Research*, vol. 32, no. 5, pp. 1323–1332.
15. Fama E., Roll R. 1972, Parameter estimates for symmetric stable distributions. *Journal of Statistical Physics*, vol. 66, pp. 331–338.
16. Smirnov V. V., Spiridonov F. F. 2013, *Fraktal'nyye modeli stokhasticheskikh protsessov* [Fractal models of stochastic processes]. *Yuzhno-Sibirskiy nauchnyy vestnik* [South-Siberian Scientific Bulletin], no. 1(3), pp. 99–102.
17. Bianchi A., Cristadoro G., Lenci M., Ligab M. 2016, Random walks in a one-dimensional Levy Random Environment. *Journal of Statistical Physics*, no. 163, pp. 22–40.

The article was received on January 30, 2018