

# Нелинейная математическая модель динамической системы трещиноватости в минералах углевмещающих горных пород

DOI: <http://dx.doi.org/10.18796/0041-5790-2019-10-92-94>**ХАЛКЕЧЕВ К.В.**

Доктор физ.-мат. наук,  
доктор техн. наук,  
профессор кафедры «Математика»  
НИТУ «МИСИС»,  
119049, г. Москва, Россия,  
e-mail: h\_kemal@mail.ru

Следуя общей схеме методологии математического моделирования, разработана содержательная модель процесса распространения трещин в минералах углевмещающих горных пород при монотонно возрастающем внешнем поле напряжений (горном давлении), которое реализуется при безвзрывной технологии добычи полезных ископаемых. Трещины взаимодействуют между собой следующим образом: более длинные трещины не дают распространяться мелким, в свою очередь, мелкие – препятствуют распространению длинных трещин путем торможения. На основании содержательной модели построена нелинейная математическая модель динамической системы трещиноватости в минералах углевмещающих горных пород. Она сводится к системе нелинейных дифференциальных уравнений, из которой по начальным концентрациям определяется концентрация трещин в любой момент времени. Из анализа решения данной системы уравнений установлено, что численности концентрации малых и крупных трещин совершают периодические колебания вокруг положения равновесия.

**Ключевые слова:** концентрация трещин, динамическая система, трещиноватость, разрушение, углевмещающая порода, математическая модель, внешнее поле напряжений, положение равновесия.

**ВВЕДЕНИЕ**

Динамика изменения трещиноватости в углевмещающих геоматериалах играет определяющую роль в прогнозировании разрушения и, как следствие, в обеспечении устойчивости бортов угольных разрезов и шахт. Причем этот процесс изменения трещиноватости не поддается непосредственному наблюдению, что затрудняет экспериментальное изучение, которое сводится в основном к контролю и не позволяет определить общие закономерности исследуемого процесса. Обзор работ в данном направлении приведен в статье [1]. Существующие математические модели, представленные в работах [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8], не учитывают взаимодействия трещин между собой, что заметно искажает реальную картину разрушения – основного процесса, сопровождающего добычу полезных ископаемых.

**ОСНОВНОЙ РАЗДЕЛ**

Следуя общей схеме построения математических моделей, построим содержательную модель. При безвзрывной технологии добычи полезных ископаемых следует ожидать монотонно возрастающее внешнее поле напряжений (горное давление), ведущее к распространению имеющихся трещин, вероятность же образования новых трещин пренебрежимо мала. При этом существующие трещины имеют различную длину и взаимодействуют между собой. Более длинные трещины «экранируют» более мелкие и не дают им распространяться, в свою очередь, мелкие – препятствуют распространению длинных трещин путем торможения. На ранней стадии трещины образуются в зернах, затем отдельные из них, благоприятно ориентированные по отношению к внешнему напряжению, распространяются уже на уровне минералов. На основании данной содержательной модели построим математическую модель.

Рассмотрим трещиноватую неограниченную среду, содержащую препятствующие друг другу два вида трещин: трещины в зернах минералов и трещины в минералах, характерные размеры которых равны или больше характерных размеров элементарного объема, но меньше размеров минерала в целом. Эта среда находится под действием внешнего поля сжимающих напряжений, принципы определения которых изложены в работах [9, 10]. При этом они могут быть учтены опосредованно в рамках теории автономных динамических систем [11] с помощью экспертной системы [12]. Концентрацию  $n$  малых и  $N$  больших трещин определим как отношение характерного размера трещин к характерному размеру элементарного объема. Тогда рост трещины будет восприниматься как рост концентрации. Данная математическая модель сводится к нелинейной системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= (k_1 - k_2 n)N, \\ \frac{dn}{dt} &= (-k_3 + k_4 N)n, \quad k_1 > 0, \quad k > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Из этой системы уравнений по начальным концентрациям  $N(0) = N(t=0)$ ,  $n(0) = n(t=0)$  определяется концентрация трещин в любой момент  $t > 0$ . Нелинейную систему (1) лучше исследовать в переменных  $N, n$ , для чего исключим дифференциал по времени:

$$\frac{dN}{dn} = \frac{(k_1 - k_2 n)N}{(-k_3 + k_4 N)n}. \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) имеют стационарное решение в виде:

$$N_0 = \frac{k_3}{k_4}, n_0 = \frac{k_1}{k_2}, \quad (3)$$

Это соответствует положению равновесия. Чтобы решить вопросы устойчивости положения равновесия и определить динамику трещиноватости исследуем уравнение (2). В результате это уравнение, что то же самое, система (1) имеет решение в виде интеграла:

$$N^{k_3} e^{-k_4 N} = C n^{-k_4} e^{k_2 n}, \quad C > 0. \quad (4)$$

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Существование интеграла (4) дает возможность сделать следующие выводы.

1. Если начальная концентрация трещин будет равна значению ее в положении равновесия, т.е.  $N(0) = N(t=0)$ ,  $n(0) = n(t=0)$ , то во все моменты времени численности концентрации как малых, так и крупных трещин не меняются.

2. При малых отклонениях от положения равновесия функции  $N(t)$  и  $n(t)$  совершают колебания относительно равновесных значений и удовлетворяют стандартному уравнению колебаний, получаемому из системы (1).

3. Если отклонение от положения равновесия велико, то поведение функций  $N(t)$ ,  $n(t)$  такое же, как и в случае уравнения (2).

Полученные выводы означают, что численности концентрации малых и крупных трещин совершают периодические колебания вокруг положения равновесия. Амплитуда колебаний и их период определяются начальными значениями численностей концентрации малых и крупных трещин, они совершаются в противофазе: максимальному значению крупных трещин  $N(t)$  соответствует минимальное значение малых трещин  $n(t)$ , и наоборот.

### Список литературы

1. Кривошеев И.А., Шамурина А.И. Чувствительный метод контроля изменения трещиноватости в массиве горных пород // Дефектоскопия. 2013. № 9. С. 62-67.

2. Ислямова А.А. Моделирование влияния трещиноватости и пористости горных пород на сейсмический сигнал // Международный научно-исследовательский журнал. 2016. № 11-5. С. 62-67.

3. Study on gas-bearing coal seam destabilization based on the improved Lippmann model and stress wave theory / G. Wang, X. Liu, H. Xu et al. // Journal of Loss Prevention in the Process Industries. 2018. Vol. 56. P. 334-341.

4. Strength criterion effect of the translator and destabilization model of gas-bearing coal seam / G. Wang, R. Wang, M. Wu et al. // International Journal of Mining Science and Technology. 2019. Vol. 29. P. 327-333.

5. Numerical investigation of the effects of coal seam dip angle on coal wall stability / Q. Yao, X. Li, B. Sun et al. // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. 2017. Vol. 100. P. 298-309.

6. Wang J., Wang Z., Yang S. A coupled macro- and meso-mechanical model for heterogeneous coal // International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences. 2017. Vol. 94. P. 64-81.

7. Прогноз устойчивости углевмещающих пород по геофизическим данным / Н.Н. Гриб, П.Ю. Кузнецов, А.А. Сясько, А.В. Качаев // Фундаментальные исследования. 2013. № 6 (Ч. 2). С. 397-401.

8. Гриб Н.Н., Кузнецов П.Ю. Прогнозирование физико-механических свойств углевмещающих пород на основе данных геофизических исследований скважин и математического аппарата марковской нелинейной статистики // Уголь. 2018. № 1. С. 68-73. DOI: 10.18796/0041-5790-2018-1-68-73. URL: <http://www.ugolinfo.ru/Free/012018.pdf> (дата обращения: 15.09.2019).

9. Халкечев Р.К., Халкечев К.В. Математическое моделирование неоднородного упругого поля напряжений породного массива кристаллической блочной структуры // Горный журнал. 2016. № 3. С. 200-205.

10. Халкечев Р.К., Халкечев К.В. Управление селективностью разрушения при дроблении и измельчении геоматериалов на основе методов подобия и размерности в динамике трещин // Горный журнал. 2016. № 6. С. 64-66.

11. Халкечев Р.К. Нечеткая математическая модель изменения концентрации трещин в минерале под действием внешней нагрузки // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2019. № 6. С. 97-105.

12. Халкечев Р.К. Экспертная система разработки математических моделей геомеханических процессов в породных массивах // Горный журнал. 2016. № 7. С. 96-98.

UDC 622.831.312:622.023.62:51.001.57 © K.V. Khalkechev, 2019  
ISSN 0041-5790 (Print) • ISSN 2412-8333 (Online) • Ugol' – Russian Coal Journal, 2019, № 10, pp. 92-94  
DOI: <http://dx.doi.org/10.18796/0041-5790-2019-10-92-94>

### Title

**NONLINEAR MATHEMATICAL MODEL OF THE FRACTURING DYNAMIC SYSTEM IN MINERALS OF COAL-BEARING ROCKS**

### Author

Khalkechev K.V.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> National University of Science and Technology "MISIS" (NUST "MISIS"), Moscow, 119049, Russian Federation

### Authors' Information

Khalkechev K.V., Doctor of Physico-Mathematical Science, Doctor of Engineering Sciences, Professor of "Mathematics" department, e-mail: [h\\_kemal@mail.ru](mailto:h_kemal@mail.ru)

### Abstract

Following the general scheme of the mathematical modeling methodology, it has been developed a meaningful description model of cracks propagation

in minerals of coal-bearing rocks with a monotonically increasing external stress field (rock pressure), which is realized with the non-explosive mining technology. According to this model cracks in coal-bearing rocks interact with each other as follows: longer cracks do not allow small ones to spread, while small cracks in turn prevent the long cracks from spreading by braking. Based on meaningful description model, a nonlinear mathematical model of fracturing in minerals of coal-bearing rocks as a dynamic system has been developed. It reduces to a system of nonlinear differential equations, from

which the initial concentration determines the concentration of cracks at any modeling time. The analysis of this system of equations shows that the value of small and large cracks concentrations perform periodic oscillations around the equilibrium position.

**Keywords**

Crack concentration, Dynamic system, Fracture, Destruction, Coal-bearing rock, Mathematical model, External stress field, Equilibrium state.

**References**

1. Krivosheyev I.A. & Shamurina A.I. Chuvstvitel'nyy metod kontrolya izmeneniya treshchinovosti v massive gornyx porod [A sensitive method for controlling changes in fracture in a rock mass]. *Defektoskopiya – Flaw detection*, 2013, No. 9, pp. 62-67. (In Russ.).
2. Islyamova A.A. Modelirovaniye vliyaniya treshchinovosti i poristosti gornyx porod na seismicheskiy signal [Modeling the effect of fracturing and porosity of rocks on a seismic signal]. *Mezhdunarodnyy nauchno-issledovatel'skiy zhurnal – International Scientific and Research Journal*, 2016, No. 11-5, pp. 62-67. (In Russ.).
3. Wang G., Liu X., Xu H. et al. Study on gas-bearing coal seam destabilization based on the improved Lippmann model and stress wave theory. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, 2018, Vol. 56, pp. 334-341.
4. Wang G., Wang R., Wu M. et al. Strength criterion effect of the translator and destabilization model of gas-bearing coal seam. *International Journal of Mining Science and Technology*, 2019, Vol. 29, pp. 327-333.
5. Yao Q., Li X., Sun B. et al. Numerical investigation of the effects of coal seam dip angle on coal wall stability. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2017, Vol. 100, pp. 298-309.
6. Wang J., Wang Z. & Yang S. A coupled macro- and meso-mechanical model for heterogeneous coal. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 2017, Vol. 94, pp. 64-81.
7. Grib N.N., Kuznetsov P.Yu., Syasyko A.A. & Kachayev A.V. Prognoz us-toychivosti uglevmeshchayushchikh porod po geofizicheskim dannym [Stability forecast of carbon-bearing rocks according to geophysical

data]. *Fundamental'nyye issledovaniya – Basic research*, 2013, No. 6 (Part 2), pp. 397-401. (In Russ.).

8. Grib N.N. & Kuznetsov P.Yu. Prognozirovaniye fiziko-mekhanicheskikh svoystv uglevmeshchayushchih porod na osnove dannyh geofizicheskikh issledovaniy skvazhin i matematicheskogo apparata markovskoy nelineynoy statistiki [Forecasting physical and mechanical properties of coal-bearing rocks based on the well logging data and mathematical tool of Markov non-linear statistics]. *Ugol' – Russian Coal Journal*, 2018, No. 1, pp. 68-73. (In Russ.). DOI: 10.18796/0041-5790-2018-1-68-73. Available at: <http://www.ugolinfo.ru/Free/012018.pdf> (accessed 15.09.2019).
9. Khalkechev R.K. & Khalkechev K.V. Matematicheskoye modelirovaniye neodnorodnogo uprugogo polya napryazheniy porodnogo massiva kristallicheskoy blochnoy struktury [Mathematical modeling of an inhomogeneous elastic stress field of a rock mass of a crystalline block structure]. *Gornyy Zhurnal – Mining Journal*, 2016, No. 3, pp. 200-205. (In Russ.).
10. Khalkechev R.K. & Khalkechev K.V. Upravleniye selektivnost'yu razrusheniya pri droblenii i izmel'chenii geomaterialov na osnove metodov podobiya i razmernosti v dinamike treshchin [Destruction selectivity control during crushing and grinding of geomaterials based on similarity and dimension methods in crack dynamics]. *Gornyy Zhurnal – Mining Journal*, 2016, No. 6, pp. 64-66. (In Russ.).
11. Khalkechev R.K. Nechetkaya matematicheskaya model' izmeneniya kontsentratsii treshchin v minerale pod deystviyem vneshney nagruzki [Vague mathematical model of changes in the concentration of cracks in a mineral under the influence of an external load]. *Gornyye Informatsionno-Analiticheskiy Byulleten (nauchno-tekhnicheskii zhurnal) – Mining Informational and Analytical Bulletin (scientific and technical journal)*, 2019, No. 6, pp. 97-105. (In Russ.).
12. Khalkechev R.K. Ekspertnaya sistema razrabotka matematicheskikh model-ey geomekhanicheskikh protsessov v porodnykh massivakh [Expert system development of mathematical models of geomechanical processes in rock masses]. *Gornyy Zhurnal – Mining Journal*, 2016, No. 7, pp. 96-98. (In Russ.).

Received September 10, 2019

РЕКЛАМА

**НПП ЗАВОД МДУ**  
 ООО НАУЧНО-ПРОИЗВОДСТВЕННОЕ ПРЕДПРИЯТИЕ  
**«ЗАВОД МОДУЛЬНЫХ  
 ДЕГАЗАЦИОННЫХ УСТАНОВОК»**

**ОБОРУДОВАНИЕ  
 ДЛЯ ДЕГАЗАЦИИ И УТИЛИЗАЦИИ  
 МЕТАНА**

**МЕТАН ПОД КОНТРОЛЕМ!**

РОССИЯ  
 Г. НОВОКУЗНЕЦК  
 ШОССЕ СЕВЕРНОЕ, 8

WWW.ZAVODMDU.RU  
 INFO@ZAVODMDU.RU  
 ТЕЛ.: +7 (3843) 991-991

**На шахте «Усковская»  
 Распадской угольной компании  
 запущена новая лава**

4 сентября 2019 г. на шахте «Усковская» введен в эксплуатацию выемочный участок лавы № 50-22 с запасами 1 млн 638 тыс. т угля.

Лава протяженностью 1700 м расположена в западной части южного крыла шахтного поля. Это предпоследняя лава пласта 50, запланированная к отработке до перехода на пласт 48. При подготовке очистного фронта пройдено около 9 км горных выработок.

Забой оснащен высокоэффективным оборудованием мировых производителей. Для безопасной работы горняков в лаве проведена дегазация. Ввод в эксплуатацию новой лавы позволит выполнить поставленную перед коллективом шахты «Усковская» задачу по годовым объемам добычи угля марки ГЖ. Окончательно освоить запасы лавы планируют к началу второго квартала 2020 г.

Шахта «Усковская» добывает коксующийся уголь марки ГЖ, который после обогащения на ЦОФ «Кузнецкая» и «Абашевская» отгружается на металлургические предприятия ЕВРАЗ. Также он пользуется спросом у сторонних потребителей в Польше, Словакии, Венгрии.

Шахта «Усковская», ЦОФ «Кузнецкая» и ЦОФ «Абашевская» находятся под управлением ООО «Распадская угольная компания», которая осуществляет функции управляющей организации в отношении угольных активов ПАО «Распадская» и ОАО «ОУК «Южкузбассуголь» (входят в состав ЕВРАЗ).