



УДК 552.122

Петрографические структуры и равновесия Харди – Вайнберга

Ю.Л.ВОЙТЕХОВСКИЙ, А.А.ЗАХАРОВА[✉]

Санкт-Петербургский горный университет, Санкт-Петербург, Россия

Статья посвящена наиболее описательному разделу современной петрографии – определению, классификации и номенклатуре петрографических структур. Предложен математический формализм, использующий теорию квадратичных форм (с перспективным расширением на алгебраические формы третьего и четвертого порядков) и статистики бинарных (соответственно, тернарных и куотернарных) межзерновых контактов в полиминеральной горной породе. Он позволяет построить полную классификацию петрографических структур с границами, отвечающими равновесиям Харди – Вайнберга.

Алгебраическое выражение петрографической структуры – каноническая диагональная форма симметрической матрицы вероятностей бинарных межзерновых контактов в горной породе. Каждой петрографической структуре однозначно сопоставляется структурная индикатриса – центральная квадратичная поверхность в n -мерном пространстве, где n – число минералов, слагающих горную породу. Структурная индикатриса – аналог коноскопической фигуры, используемой для оптического распознавания минералов. Показано, что непрерывность изменения организации горных пород (то есть вероятностей различных межзерновых контактов) не противоречит резкому изменению структуры на границах классификации. Тем самым решена задача, казавшаяся неразрешимой А.Харкеру и Е.С.Федорову.

Методика применена для описания структур гранитов Салминского плутона (Карелия) и массива Акжайляу (Казахстан) и потенциально применима для расчленения монотонных толщ, корреляции разрезов – везде, где нужна однозначная, воспроизводимая диагностика петрографических структур. Важная перспективная задача метода – извлечение из полученной диагностики генетической информации.

Ключевые слова: горная порода; петрографическая структура; квадратичная форма; структурная индикатриса; классификация; номенклатура

Как цитировать эту статью: Войтеховский Ю.Л. Петрографические структуры и равновесия Харди – Вайнберга / Ю.Л.Войтеховский, А.А.Захарова // Записки Горного института. 2020. Т. 242. С. 133-138. DOI: 10.31897/PMI.2020.2.133

Введение. Определение структуры горных пород важно для их правильной диагностики и реконструкции условий образования. Но категория петрографической структуры сегодня определена недостаточно строго, например, в сравнении с кристаллической структурой. В специальных словарях [12, 15] приведено множество терминов, характеризующих структуры горных пород. Как правило, в них смешаны морфологические и генетические аспекты. Это не позволяет построить математическую теорию, исчерпывающую классификацию и соответствующую номенклатуру петрографических структур. В создании математической теории своего объекта – горной породы – петрография отстает от кристаллографии более чем на сто лет. Более того, бытует устойчивое предубеждение против самой возможности такой теории.

Е.С.Федоров отмечал: «Если принять во внимание, что различные виды структуры зависят от внешних условий, имевших место при образовании породы, условий постоянно изменявшихся, то станет понятно, как трудно разграничить по структуре типы пород, происшедших из одной и той же или близких по составу магм. Коренное различие между породами есть, конечно, первоначальный химический состав; но и этот состав весьма изменчив, и в этом отношении между различными породами существуют самые разнообразные переходные ступени, не позволяющие резко разграничивать одни типы пород от других. ... Легко понять, что при большом разнообразии в составе невозможно установить естественной классификации, которая могла бы дать каждой породе принадлежащее место» [18, с. 164].

О том же писал кембриджский петролог А.Харкер: «Петрология до сих пор не выработала никакой философской классификации горных пород. Не может быть создана никакая классификация, которая обладала бы определенностью и точностью, найденными в некоторых других областях науки. Математически точные законы химии и физики, которые придают индивидуальность минеральным видам, не помогают нам в работе со сложными минеральными агрегатами и какой-то фундаментальный принцип ... еще должен быть найден в петрологии. Горные породы различных типов часто связаны непрерывными переходами, так что никакая искусственная клас-



сификация с резкими разделительными границами не может истинно представлять факты природы. На сегодня, следовательно, наилучшей систематикой является та, которая объединяет, насколько это возможно ради удобства описания, горные породы с общими свойствами, в первую очередь имея в виду те свойства, которые наиболее прямо зависят от важных генетических условий. Используемая ниже группировка должна рассматриваться скорее как одно из соглашений, чем как принцип» (*пер. авт.*) [20, с. 20]. При этом «ниже использована» вполне современная классификация горных пород.

Отношение к ситуации постепенно меняется: «Сколь бы разнообразными ни казались картируемые в различных регионах ассоциации горных пород, есть уверенность, что при системном подходе они, подобно химическим элементам в таблице Д.И.Менделеева, могут быть естественно классифицированы, открыв путь к унификации легенд к геологическим картам нового поколения» [16, с. 5]. Вопрос в том, что понимать под системным подходом и какой математический аппарат использовать.

Методология. Если под системным подходом при описании петрографических структур понимать использование как можно большего числа параметров, то это уже имеет место и является скорее недостатком, чем достоинством. Причина ясна – весьма разные морфологические (идио-, ксеноморфные и др.), масштабные (равно- и неравнозернистые; мелко-, средне-, крупнозернистые и др.) и генетические (бластез и др.) характеристики минералов (элементов), слагающих горную породу (систему), в стройную теорию не связываются [14, с. 110-121, 283-294]. Именно в соответствии с принципами теории систем ранее было предложено при описании организации горных пород сместить акцент с морфометрических характеристик минералов на статистику отношений их контактирования [3, 5, 7].

Организацию n -минеральной горной породы предложено выражать алгебраическим соотношением:

$$\sum_{i,j=1}^n p_{ij} m_i m_j = [m_1 \ m_2 \ \dots \ m_n] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_n \end{bmatrix} = 1,$$

выявляющим фундаментальную роль симметрической матрицы $[P_{ij}]$ вероятностей (частот) p_{ij} различных межзерновых контактов $m_i m_j$ минералов m_i и m_j . Одновременно оно задает в пространстве (m_1, \dots, m_n) невырожденные центральные квадратичные поверхности (n -мерные эллипсоиды и гиперboloиды) – структурные индикатрисы горных пород.

Математическое выражение петрографической структуры – каноническая диагональная форма $[D_{ii}]$ матрицы $[P_{ij}]$, определяющая тип структуры знаками коэффициентов d_{ii} . Вещественная симметрическая матрица всегда приводима к диагональному виду невырожденным преобразованием $[D_{ii}] = [Q_{ij}] [P_{ij}] [Q_{ij}]^{-1}$, соответствующим вращению структурной индикатрисы в пространстве (m_1, \dots, m_n) и приведению к главным осям [9, 19]. Номенклатура петрографической структуры S_n^m означает, что среди коэффициентов d_{ii} ровно m положительных.

Итак, непрерывное изменение вероятностей p_{ij} различных межзерновых контактов (организации горной породы) не противоречит резкому изменению типа структурной индикатрисы (петрографической структуры). По индикатрисам строится полная классификация петрографических структур, с которой строго связана их номенклатура. Представляется, что предложенная методология следует системному подходу и хотя бы отчасти разрешает сомнения Е.С.Федорова и А.Харкера. Теория использована для расчленения монотонного разреза габбро-норитов Федорова-Панского интрузива на Кольском полуострове [4, 6, 8]. Представляем новые приложения теории и необходимые дополнения к ней.

Граниты Салминского плутона, Карелия. Важной проблемой геологии является разработка методики картирования гранитоидных интрузий [16]. В части описания и сравнения петрографических структур рассмотрим граниты Салминского плутона [2]. В них различены пять минеральных фаз (рис.1): кварц (желтый), плагиоклаз (голубой), К-На полевой шпат (красный), биотит (грязно-зеленый) и акцессории (фиолетовый). Различаются ли петрографические структуры в двух шлифах?

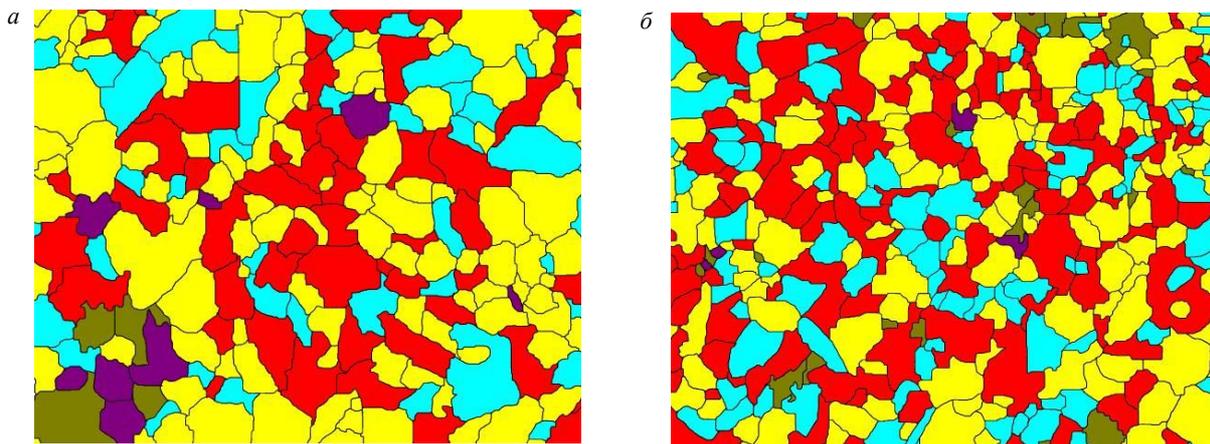


Рис.1. Среднезернистый пертрит (а) и порфировидный микроклин-альбитовый гранит (б), основная масса без порфировых вкрапленников. Размер по вертикали 1 см

В обоих случаях матрицы $[P_{ij}]$ приводятся к диагональному виду, отвечающему структуре S_5^2 . Структурная индикатриса – трехполостный гиперboloид в пространстве (m_1, \dots, m_5) . Индексы соответствуют строкам и столбцам матриц и означают: 1 – кварц, 2 – плагиоклаз, 3 – К-На полево-й шпат, 4 – биотит, 5 – акцессории. Таким образом, оба образца относятся к одному структурному типу, хотя их организация, фиксируемая всей совокупностью вероятностей p_{ij} межзерновых контактов, различна (типизация структуры не требует пересчета чисел межзерновых контактов на вероятности):

$$\begin{bmatrix} 164 & 87,5 & 106,5 & 7 & 10,5 \\ 87,5 & 35 & 49,5 & 2,5 & 3,5 \\ 106,5 & 49,5 & 46 & 1,5 & 3,5 \\ 7 & 2,5 & 1,5 & 1 & 3,5 \\ 10,5 & 3,5 & 3,5 & 3,5 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} + & & & & \\ & + & & & \\ & & - & & \\ & & & - & \\ & & & & - \end{bmatrix} \rightarrow S_5^2;$$

$$\begin{bmatrix} 148 & 98 & 182 & 21,5 & 4,5 \\ 98 & 53 & 102,5 & 15 & 2 \\ 182 & 102,5 & 105 & 17,5 & 2,5 \\ 21,5 & 15 & 17,5 & 5 & 2,5 \\ 4,5 & 2 & 2,5 & 2,5 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} + & & & & \\ & + & & & \\ & & - & & \\ & & & - & \\ & & & & - \end{bmatrix} \rightarrow S_5^2.$$

Анализ шлифов может быть продолжен, поскольку акцессории и биотит составляют в граните весьма малую долю. Применим метод вычитания акцессориев [7], поочередно удаляя их из рассмотрения, то есть убирая соответствующие строки и столбцы из матриц $[P_{ij}]$. В обоих случаях получаем тип структуры S_4^2 , индикатриса – двуполостный гиперboloид в пространстве (m_1, \dots, m_4) :

$$\begin{bmatrix} 164 & 87,5 & 106,5 & 7 \\ 87,5 & 35 & 49,5 & 2,5 \\ 106,5 & 49,5 & 46 & 1,5 \\ 7 & 2,5 & 1,5 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} + & & & \\ & + & & \\ & & - & \\ & & & - \end{bmatrix} \rightarrow S_4^2;$$

$$\begin{bmatrix} 148 & 98 & 182 & 21,5 \\ 98 & 53 & 102,5 & 15 \\ 182 & 102,5 & 105 & 17,5 \\ 21,5 & 15 & 17,5 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} + & & & \\ & + & & \\ & & - & \\ & & & - \end{bmatrix} \rightarrow S_4^2.$$

Но без биотита получаем структуры S_4^1 и S_4^2 . Индикатрисы – трехполостный и двуполостный гиперboloиды в пространстве (m_1, \dots, m_4) :

$$\begin{bmatrix} 164 & 87,5 & 106,5 & 10,5 \\ 87,5 & 35 & 49,5 & 3,5 \\ 106,5 & 49,5 & 46 & 3,5 \\ 10,5 & 3,5 & 3,5 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} + & & & \\ & + & & \\ & & - & \\ & & & - \end{bmatrix} \rightarrow S_4^2;$$

$$\begin{bmatrix} 148 & 98 & 182 & 4,5 \\ 98 & 53 & 102,5 & 2 \\ 182 & 102,5 & 105 & 2,5 \\ 4,5 & 2 & 2,5 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} + & & & \\ & - & & \\ & & - & \\ & & & - \end{bmatrix} \rightarrow S_4^1.$$

Вместе с предыдущим результатом это означает, что в одном петрографическом шлифе (рис.1, а) акцессории и биотит образуют статистически эквивалентные сростания, в другом (рис.1, б) – разные. Без акцессориев и биотита основная (каркасообразующая) часть изучаемых гранитов имеет структуру S_3^1 , индикатриса – двуполостный гиперboloид в пространстве (m_1, m_2, m_3) :

$$\begin{bmatrix} 164 & 87,5 & 106,5 \\ 87,5 & 35 & 49,5 \\ 106,5 & 49,5 & 46 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} + & & \\ & - & \\ & & - \end{bmatrix} \rightarrow S_3^1;$$

$$\begin{bmatrix} 148 & 98 & 182 \\ 98 & 53 & 102,5 \\ 182 & 102,5 & 105 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} + & & \\ & - & \\ & & - \end{bmatrix} \rightarrow S_3^1.$$

Таким образом, предложенная методология типизации петрографических структур по статистикам межзерновых контактов позволяет выявлять даже тонкие особенности организации горных пород. Это позволяет применять ее для картирования гранитоидных интрузий. Рутинные алгебраические операции с как угодно большими матрицами компьютеризованы.

Граниты массива Акжайляу, Казахстан. Массивные текстуры весьма распространены в горных породах преимущественно магматического генезиса. Они означают беспорядочное пространственное распределение породообразующих минералов в отличие от текстур слоистых, полосчатых, пятнистых. Но всегда ли беспорядочное пространственное распределение отвечает идеальному перемешиванию минералов? Для проверки гипотезы был взят гранит массива Акжайляу (рис.2).

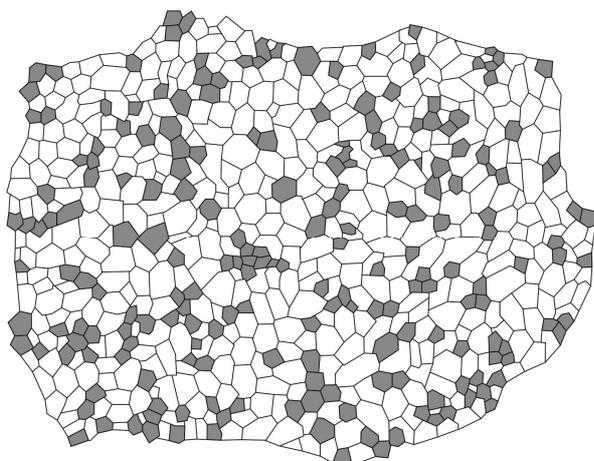


Рис.2. Типизированная физиография гранита массива Акжайляу [1]. Серый – кварц, белый – полевые шпаты, не показаны слюды и амфиболы. Полированный штаф, 15 × 10 см

В качестве математической модели, отвечающей идеальному перемешиванию минералов, принято равновесие Харди – Вайнберга [10; 11, с. 126-128]. Применительно к нашей задаче это означает следующее. Если p и q – частоты (вероятности) минералов A и B (в условной записи $pA + qB = 1$), то равновесные частоты их контактов AA , AB (то же, что и BA) и BB в горной породе могут быть рассчитаны по формуле

$$(pA + qB)^2 = p^2 AA + 2pq AB + q^2 BB = 1.$$



Оценка отклонения от равновесных частот – стандартная статистическая задача. Формула Харди – Вайнберга очевидным образом обобщается по числу слагаемых на полиминеральные горные породы

$$(p_1A_1 + \dots + p_nA_n)^2 = \sum p_{ij} A_iA_j = 1, \text{ где } i, j = 1, \dots, n.$$

Теоретически и практически важно, что она обобщается по степеням на:

- тернарные

$$(p_1A_1 + \dots + p_nA_n)^3 = \sum p_{ijk} A_iA_jA_k = 1, \text{ где } i, j, k = 1, \dots, n;$$

- куотернарные межзерновые контакты

$$(p_1A_1 + \dots + p_nA_n)^4 = \sum p_{ijkl} A_iA_jA_kA_l = 1, \text{ где } i, j, k, l = 1, \dots, n.$$

Изучение петрографических структур и текстур следовало бы выполнять в 3D. Анализ в 2D (в шлифе, полировке) оправдывается лишь тем, что их классификация и номенклатура сформировались по наблюдениям в 2D. Вывести статистику куотернарных контактов минеральных зерен в горной породе сегодня технически невозможно. Стыки четырех зерен в петрографический шлиф не попадают. Но статистика их тернарных (тройных) контактов в n -минеральных горных породах может быть найдена в шлифах.

Тернарные контакты. Использование куотернарных и даже тернарных межзерновых контактов на практике интересно тем, что получаемая классификация петрографических структур гораздо обширнее, чем в случае бинарных контактов. Следует ожидать, что в этом случае через статистику межзерновых контактов выявляются и типизируются все более тонкие детали организации горных пород.

Для гранита Акжайляу вероятности зерен кварца и полевого шпата в шлифе (208 и 428 в натуральном выражении) $p_1 = 0,327$ и $p_2 = 0,673$. Расчетные вероятности тернарных контактов, отвечающие равновесию Харди – Вайнберга $p_{111} = 0,035$, $p_{112} = 0,216$, $p_{122} = 0,444$, $p_{222} = 0,305$. От общего числа 1116 тернарных контактов это составляет: 39, 241, 496 и 340. Реальные числа контактов подсчитаны в шлифе: 17, 211, 490 и 398. Значение непараметрического критерия хи-квадрат 26,02 значительно превышает пороговое значение в 11,3 для доверительной вероятности $p = 0,99$ и числа степеней свободы $df = 3$. Таким образом, гипотеза о соответствии массивной текстуры изучаемого гранита равновесию Харди – Вайнберга отвергается. Причина – явно пониженные частоты p_{111} , p_{112} и завышенные p_{222} .

Особенность ситуации состоит в том, что даже в случае соответствия подсчитанных вероятностей теоретическим (т.е. реальной текстуры – равновесию Харди – Вайнберга) вывод о соответствии делается с некоторой вероятностью. Подсчитанные вероятности всегда отличаются от равновесных. Равновесия Харди – Вайнберга определяют классификационные границы в многообразии статистически неравновесных ситуаций (в нашем случае – структур горных пород). Для их типизации в качестве структурных индикатрис, по аналогии с [3, 5, 7], используем ньютонову классификацию кубических кривых на плоскости [17, с. 44-53]. К сожалению, для $n > 2$ математическая теория для целей петрографии не адаптирована [13]. Уравнение искомой кривой

$$\sum p_{ijk} A_iA_jA_k = 1, \text{ где } i, j, k = 1, \dots, n$$

для случая $n = 2$ (биминеральная горная порода) имеет вид (коэффициенты уравнения – подсчитанные в шлифе вероятности тернарных контактов)

$$0,015 m_1^3 + 0,189 m_1^2 m_2 + 0,439 m_1 m_2^2 + 0,357 m_2^3 = 1$$

и определяет кривую из двух гиперболических и одной прямолинейной ветвей (рис.3). Это одна из двух десятков возможных структурных индикатрис [17], тогда как при описании на основе бинарных межзерновых контактов при $n = 2$ возможны всего две структуры. Исследование структурных индикатрис 3-го порядка хотя бы для $n = 3$ (триминеральных горных пород) методами компьютерного моделирования – перспективное развитие теории.

