УДК 622(23.02+83)

УСЛОВИЕ ПРОЧНОСТИ ГОРНЫХ ПОРОД

Жабко А. В.

На основании ранее выполненных автором исследований в работе предлагается критерий разрушения твердых тел (горных пород). Излагаются методологические основы его получения с краткими теоретическими выкладками. Производится его анализ и интерпретация получаемых результатов. Анализируется значение угла наклона наиболее опасной площадки среза в предельном равновесии для различного уровня напряженного состояния. Показывается, что значение данного угла не является постоянной величиной, а зависит от значений предельных компонент главных напряжений. Рассматриваются частные случаи предлагаемого критерия для идеально сыпучих и идеально связных сред. Указывается на принципиальное отличие критериев Кулона и Мора. Указывается на преимущества предлагаемого критерия перед известным аналогом при его использовании в качестве поверхности текучести (пластического потенциала). Дана физическая интерпретация явлению дилатансии при разрушении твердых тел.

Ключевые слова: *критерий разрушения; условия равновесия; дифференциальное уравнение; главные напряжения; угол наклона площадки скольжения; критерий Кулона; критерий Мора; ассоциированный закон пластического течения; коэффициент дилатансии; пластическое деформирование.*

В работе [1] автором получен критерий разрушения горных пород, имеющий следующий вид:

$$\sigma_3 = \sigma_1 - 2C\sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg}\varphi\,\sigma_1}{C}}, \qquad (1)$$

где σ_3, σ_1 – главные напряжения; C – сцепление; φ – угол внутреннего трения.

Рассмотрим полупространство (толщу земной коры). Разобьем его вертикальным сечением на две части. Отбросим одну из них, заменяя ее действие по глубине эпюрой распределения горизонтальных главных напряжений σ_3 (рис. 1). Таким образом, определение пластической (жесткопластической)

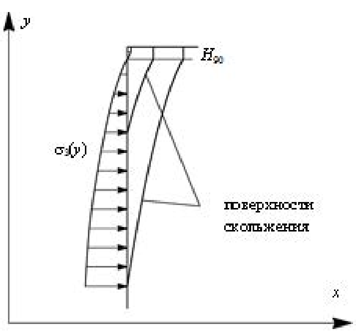

Рис. 1. Расчетная схема к определению эпюры горизонтальных напряжений с глубиной

составляющей компоненты горизонтальных напряжений сводится к определению этой эпюры, то есть к определению закона распределения нормальных напряжений с глубиной. Для определения эпюры распределения напряжений необходимо знать положение и форму поверхности скольжения, по которой будет разрушен массив, а также располагать условием равновесия породной призмы. Условие равновесия призмы смещения вдоль произвольной поверхности скольжения имеет следующий вид [2, 3]:

$$\int\left[\gamma\left(\hat{y}-y\right)\left(y'-f\right)-C\left(1+y'^2\right)+\left(T'+fE'\right)y'\right]dx+$$
$$+\left(E_1-E_0\right)-f\left(T_1-T_0\right)=0, \qquad (2)$$

где γ – объемный вес горных пород; $\hat{y}, y$ – функции линий откоса и поверхности скольжения, соответственно; y' – производная функции поверхности скольжения; T_0, E_0, T_1, E_1 – внешние касательные и нормальные реакции на вертикальных гранях призмы смещения, соответственно, слева и справа; $f = \operatorname{tg}\varphi$ – коэффициент внутреннего трения (тангенс угла внутреннего трения); C – сцепление массива горных пород; E', T' – соответственно производные функций нормальной и касательной составляющих межблоковой реакции.

Для использования выражения (2) необходимо знать закон распределения межблоковых реакций вдоль поверхности скольжения.

С другой стороны, в работе [1] показывается, что для обнажений типа «вертикальный откос» условие равновесия имеет следующий вид:

$$\int\left[\gamma\left(\hat{y}-y\right)\left(y'-f\right)-\mathrm{C}\left(1+y'^2\right)\right]dx+$$
$$+\left(E_1-E_0\right)-f\left(T_1-T_0\right)=0. \qquad (3)$$

Наиболее слабая поверхность скольжения определяется решением следующей вариационной задачи [1]:

$$\int\left[\gamma\left(\hat{y}-y\right)\left(y'-f\right)-\mathrm{C}\left(1+y'^2\right)\right]dx\rightarrow\max. \quad (4)$$

Дифференциальное уравнение поверхности скольжения имеет следующий вид [1]:

$$\left(H-y\right)=\frac{\mathrm{C}\left(y'^2-1\right)}{\gamma\operatorname{tg}\varphi}. \qquad (5)$$

Потенциальные поверхности скольжения, описываемые уравнением (5) для различных глубин, приведены на рис. 1.

Перейдем к анализу выражения (1). Его можно представить в следующем виде:

$$\sigma_3=\sigma_1-2\mathrm{C}\operatorname{tg}\psi, \qquad (6)$$

где ψ – угол наклона наиболее опасной площадки скольжения к направлению действия главного напряжения.

Если σ_3 = 0 (одноосное сжатие), то $\psi=\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}$, а $\sigma_1 = \sigma_{сж}$ ($\sigma_{сж}$ – предел прочности на одноосное сжатие). При увеличении σ_3 (сжимающие напряжения считаются положительными) угол наклона критической площадки также увеличивается. Если выполняется условие $\sigma_р < \sigma_3 < 0$ ($\sigma_р$ – предел прочности на одноосное растяжение), то $\psi<\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}$. В случае, если материал имеет пластический характер разрушения, то есть φ = 0, угол наклона критической площадки среза является постоянной величиной, не зависящей от уровня напряжений, и равен $\psi = 45^o$. А критерий (1, 6) принимает вид:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\mathrm{C}. \qquad (7)$$

Выражение (7) есть не что иное, как известный критерий разрушения Треска (Сен-Венана) (1868) [4].

Для идеально сыпучих материалов (С = 0), критерий (1) дает выражение:

$$\sigma_1 = \sigma_3. \qquad (8)$$

Формула (8) выражает условие равновесия жидкости, что соответствует гидростатическому полю распределения напряжений. При С → 0 угол наклона критической площадки скольжения возрастает до $\psi = 90^o$, а второе слагаемое в правой части уравнения (1), которое можно назвать девиаторным, стремится к нулю.

Необходимо также отметить, что среду с отсутствием сцепления нельзя ассоциировать, например, с отвалом горных пород, в котором величина сцепления анизотропна. С другой стороны, полное отсутствие сцепления (сопротивления разрыву) и внутреннего трения (вязкости) соответствует определению идеальной жидкости.

Из выражения (1) также следует, что для высокого уровня напряжений предельные компоненты главных напряжений равны:

$$\lim_{\sigma_1\to\infty}\frac{\sigma_3}{\sigma_1}=1. \qquad (9)$$

Из выражений (8) и (9) следует, что для несвязных материалов и материалов, обладающих сцеплением, но находящихся в условиях высоких напряжений, условия предельного равновесия совпадают. Другими словами, можно говорить о том, что на больших глубинах породы проявляют свойства жидкости.

Очевидно, что напряжение σ_1 в критерии (1) не может быть отрицательным, поэтому, положив σ_1 = 0, получим σ_3 = –2С. То есть предел прочности на растяжение по модулю не может превышать двойного сцепления $\left(\left|\sigma_р\right|<2\mathrm{C}\right)$. То есть для несвязных материалов $\left|\sigma_р\right|=0$.

Заметим, что при выводе условий равновесия (2, 3) и определении геометрии наиболее опасной поверхности скольжения (4, 5) использовался линейный критерий Кулона (1776) [4]:

$$\tau = \sigma_n \operatorname{tg}\varphi + \mathrm{C}, \qquad (10)$$

где τ, σ_n – предельные касательные и нормальные напряжения на площадке среза, соответственно.

Уравнение (10) в литературе часто называют критерием Кулона – Мора, Мора – Кулона или просто Мора. В 1900 году Мор предложил общую форму критерия прочности, связывающую главные нормальные напряжения, причем конкретную функциональную зависимость он не предлагал. В дальнейшем было предложено построение паспорта прочности (10) в виде огибающей предельных кругов Мора. Отметим, что в случае криволинейной огибающей предельных кругов Мора угол наклона критической площадки среза к линиям действия главных напряжений будет меняться, что противоречит существующей теории.

Однако заметим очень важное различие между критериями Кулона и Мора. Критерий Кулона в форме (10) был получен чисто эмпирически, и в нем совершенно ничего не говорится о главных напряжениях. Критерий Мора выражает предельное соотношение только через главные напряжения, и в нем ничего не говорится о напряжениях на площадке среза. Паспорт прочности по Кулону может быть непосредственно получен по результатам испытаний на прямой срез. Для получения паспорта прочности в осях главных напряжений по Мору необходимо произвести трехосные (объемные) испытания.

Для получения отображения паспорта прочности в осях главных напряжений из системы напряжений на площадке среза (и наоборот), то есть связи критериев Кулона и Мора, необходимо располагать условиями передачи внешней нагрузки (главных напряжений) на площадку среза, что на современном этапе развития экспериментальной базы невозможно. Тем не менее, критерий (10) в осях главных напряжений некоторые авторы, например [5], представляют в виде:

$$\sigma_1 = \sigma_{сж} + \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\sigma_3. \qquad (11)$$

Между критериями (1) и (11) существуют два принципиальных отличия. Во-первых, в критерии разрушения (11) угол наклона наиболее опасной площадки скольжения к линии действия главного напряжения σ_3 является величиной постоянной, $\psi = \pi/4 + \varphi/2$. Данный угол обеспечивает максимальную разницу между сдвигающими и удерживающими силами по площадке среза в окрестности конкретной точки при заданном уровне напряжений. В критерии (1) угол наклона критической площадки является величиной переменной, зависящей от уровня напряжений, это и придает критерию прочности кривизну. Кроме того, значение угла наклона критической площадки определяется из условия максимума разности сдвигающих и удерживающих сил вдоль всей поверхности разрушения на возможном перемещении всей механической системы (призмы смещения). Во-вторых, минимальное главное напряжение σ_3 не совершает работу на площадке сдвига, то есть не реализует удерживающего эффекта в виде трения. И действительно, если подставить критерий разрушения (1) в систему уравнений (12), то получим критерий Кулона в виде уравнения (10).

$$\sigma_n = \sigma_1\cos^2\psi,$$
$$\tau = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_3\right)\sin 2\psi. \qquad (12)$$

Фактически критерий (1) получен моделированием разрушения твердого тела в изменяющемся поле главных напряжений, и в этой связи он имеет некоторое методологическое сходство с микродефектными теориями прочности.

Если линеаризовать уравнение (1) в окрестности точки ($\sigma_1 = \sigma_{сж}$; $\sigma_3 = 0$), то критерий разрушения примет вид:

$$\sigma_1 = \sigma_{сж} + (1 + \sin\varphi). \qquad (13)$$

Линеаризация критерия (1) эквивалентна замене криволинейной поверхности скольжения на прямолинейную с углом падения площадки среза $\psi = \pi/4 + \varphi/2$, при тех же механических характеристиках. Анализируя выражения (11) и (13), констатируем их качественное сходство, а при $\varphi = 0$ они совпадают.

Известно, что пластическое деформирование у хрупких материалов ($\varphi \neq 0$) сопровождается увеличением их объема (дилатансией). Вопрос об увеличении объема при пластическом деформировании удобнее рассматривать в осях, совпадающих с направлением действия главных напряжений. Если принять ассоциированный закон пластического течения (принцип нормальности), то приращение пластических деформаций будет нормальным к поверхности текучести (пластического потенциала). На рис. 2 представлены критерии (1), (11) и (13), а также вектора приращений пластических деформаций в случае принятия ассоциированного закона пластического течения.

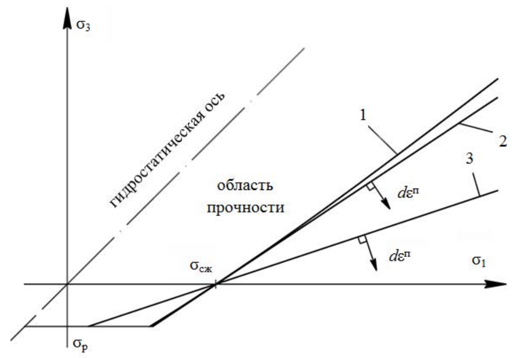

Рис. 2. Критерии прочности (пластичности):

$$1 - \sigma_3 = \sigma_1 - 2C\sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg}\varphi\sigma_1}{C}};\ 2 - \sigma_1 = \sigma_{сж} + \left[1 + \sin\varphi\right]\sigma_3;$$

$$3 - \sigma_1 = \sigma_{сж} + \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi}\sigma_3$$

Для оценки объемных изменений при пластическом деформировании используется так называемый *коэффициент дилатансии*, представляющий собой котангенс угла наклона паспорта прочности β (при ассоциированном законе пластического течения) к оси σ_1 (см. рис. 2). Значение коэффициента дилатансии определяется выражением [5]:

$$\operatorname{ctg}\beta = \left|\frac{d\varepsilon_3^{п}}{d\varepsilon_1^{п}}\right|, \qquad (14)$$

где ctg β – коэффициент дилатансии; $d\varepsilon_1^{п}$, $d\varepsilon_3^{п}$ – приращения пластических деформаций по направлениям главных осей.

В случае, когда коэффициент дилатансии равен единице, пластическое течение называется *эквиволюмиальным* (равнообъемным). Такое деформирование характерно для материалов пластического разрушения.

Приращения пластических деформаций определяется по формулам [4]:

$$d\varepsilon_1^{п} = \lambda\frac{\partial Q}{\partial\sigma_1},\ d\varepsilon_3^{п} = \lambda\frac{\partial Q}{\partial\sigma_3}, \qquad (15)$$

где λ – постоянная; Q – функция пластического потенциала (условие пластичности или прочности (1, 11, 13) с нулем в правой части).

Согласно уравнениям (14, 15) коэффициент дилатансии для поверхности текучести в виде (11) равен:

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi}. \qquad (16)$$

Коэффициент дилатансии для линеаризованного критерия (13) равен:

$$\operatorname{ctg}\beta = 1 + \sin\varphi. \qquad (17)$$

Увеличение объема при пластическом деформировании, согласно (16), дает завышенную величину, что противоречит экспериментальным данным [6]. Для устранения данного несоответствия прибегают к искусственному уменьшению приращения объема пластических деформаций посредством необоснованной замены угла внутреннего трения в критерии (11) так называемым углом дилатансии i или его максимальным значением i_0 при отсутствии нормального напряжения на площадке среза (при разрушении трещины i_0 будет стремиться к углу подъема неровностей контактирующих поверхностей). В общем случае величина дилатансии является производной $d\delta_n / d\delta_s$ (где δ_n, δ_s – величины нормального и касательного сдвига, соответственно). Лейхтниц и Ербан получили максимальное значение угла дилатансии на трещине в пределах 10–20° [6]. Подобным образом переходят к неассоциированному закону пластического течения.

Для неассоциированного закона пластического течения в нашем случае, то есть для соответствия критериев (11) и (13), а также равенства коэффициентов дилатансии (16) и (17), при углах внутреннего трения 35, 30, 20°, углы дилатансии должны быть приняты равными 12,8, 11,5, 8,4° соответственно.

Выше указывалось на отсутствие реализации механизма трения на площадке среза от действия минимального главного напряжения, что обосновано аналитически, однако физические предпосылки данного феномена объяснить достаточно сложно.

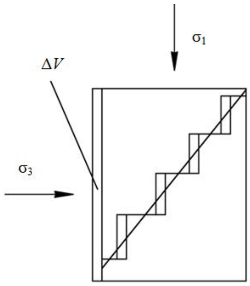

Рис. 3. Схема пластического деформирования и разрушения образца

Можно предположить, что его сущность заключается в принципиальном отличии упругого и пластического деформирования, а именно в дилатансии. Как при упругом, так и при пластическом деформировании, в направлении максимального главного сжимающего напряжения происходит уменьшение размера образца, а в направлении минимального – расширение. При упругом деформировании не происходит увеличения объема (явление дилатансии не наблюдается), и поэтому деформирование происходит в «естественной упаковке» с полным контактом между зернами образца. В случае пластического деформирования происходит разуплотнение зерен, и поэтому в направлении расширения (увеличения объема ΔV), по-видимому, теряется контакт (рис. 3), что и объясняет отсутствие проявления механизма трения в предельном равновесии от действия минимального главного напряжения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Жабко А. В. Напряженное состояние земной коры // Известия УГГУ. 2014. № 3(35). С. 57–60.
2. Zhabko A.V. Calculation theory of stability of foundations and slopes // Proceedings XV International ISM Congress 2013. 16–20 September 2013, Aachen, Germany. pp. 85–97.
3. Жабко А. В. Основы общей теории расчета устойчивости откосов // Известия УГГУ. 2013. № 4(32). С. 47–58.
4. Фадеев А. Б. Метод конечных элементов в геомеханике. М.: Недра, 1987. 221 с.
5. Прочность и деформируемость горных пород / Ю. М. Карташов [и др.]. М.: Недра, 1979. 269 с.
6. Кашников Ю. А., Ашихмин С. Г. Механика горных пород при разработке месторождений углеводородного сырья. М.: ООО «Недра-Бизнесцентр», 2007. 467 с.

Поступила в редакцию 11 ноября 2014 г.

Жабко Андрей Викторович – кандидат технических наук, доцент кафедры маркшейдерского дела. 620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30, Уральский государственный горный университет. E-mail: zhabkoav@mail.ru