УДК 528.15:528.087

УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННО-ОБРАТНЫХ МАТРИЦ

Анастасия Александровна Кошкина
Сибирский государственный университет геосистем и технологий, 630108, Россия, г. Новосибирск, ул. Плахотного, 10, магистрант, кафедра физической геодезии и дистанционного зондирования, тел. (913)922-25-15, e-mail: simpson_24@mail.ru

Максим Александрович Кошкин
Сибирский государственный университет геосистем и технологий, 630108, Россия, г. Новосибирск, ул. Плахотного, 10, магистрант, кафедра физической геодезии и дистанционного зондирования, тел. (913)922-25-26, e-mail: koshkinmaxim@gmail.com

Амридон Гемзаевич Барлиани
Сибирский государственный университет геосистем и технологий, 630108, Россия, г. Новосибирск, ул. Плахотного, 10, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной информатики и информационных систем, тел. (983)319-99-31

В статье рассмотрена параметрическая версия уравнивания и оценки геодезических сетей на основе обобщенного решения.

Ключевые слова: уравнивание, геодезические сети, обобщеннообратная матрица, метод наименьших квадратов, рекурсивный алгоритм.

ADJUSTMENT OF GEODETIC NETWORKS BASED ON GENERALIZED INVERSE MATRICES

Anastasia A. Koshkina
Siberian State University of Geosystems and Technologies, 630108, Russia, Novosibirsk, 10 Plakhotnogo St., undergraduate, Department of Physical Geodesy and Remote Sensing, tel. (913)922-25-15, e-mail: simpson_24@mail.ru

Maxim A. Koshkin
Siberian State University of Geosystems and Technologies, 630108, Russia, Novosibirsk, 10 Plakhotnogo St., undergraduate, Department of Physical Geodesy and Remote Sensing, tel. (913)922-25-26, e-mail: koshkinmaxim@gmail.com

Amridon G. Barliani
Siberian State University of Geosystems and Technologies, 630108, Russia, Novosibirsk, 10 Plakhotnogo St., candidate of technical sciences, associate professor of Applied Informatics and Information Systems, tel. (983)319-99-31

In article the parametrical version of equalizing and an assessment of geodetic networks on the basis of the generalized decision is considered.

Key words: equalizing, geodetic networks, obobshchennoobratny matrix, method of the smallest squares, recursive algorithm.

В геодезической практике для определения искомых параметров в геодезических сетях (высот реперов, координат геодезических пунктов) выполняются n измерений, число которых намного больше необходимых. Избыточные измерения, а также тот факт, что измерения сопровождаются случайными ошибками наблюдений, приводят к неоднозначному определению искомых параметров в геодезических сетях. В связи с этим возникает задача уравнивания геодезических сетей.

Уравнивание геодезических сетей выполняется методом наименьших квадратов параметрическим и коррелатным способами.

Параметрический способ уравнивания геодезических сетей предполагает, что между вектором истинных значений измеряемых величин Y и вектором точных значений определяемых параметров X существует следующая функциональная связь:

$$Y = \varphi(X) \tag{1}$$

Запишем систему параметрических уравнений в линейном виде:

$$A\Delta + L = 0, \tag{2}$$

где $\Delta = X - x^0$ – вектор-столбец точных значений поправок к приближенным значениям параметров; $L = Y - \varphi(x^0)$, а матрица частных производных

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1^0} \; \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2^0} \cdots \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_k^0} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1^0} \; \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2^0} \cdots \frac{\partial\varphi_{n1}}{\partial x_k^0} \end{pmatrix}.$$

Вследствие того, что результаты измерений сопровождаются ошибками наблюдений, поэтому при замене вектора истинных значений измеряемых величин Y, вектором измеренных значений y, в правой части выражения (2) получается неизвестный вектор ошибок, то есть:

$$A\Delta + l = \varepsilon, \tag{3}$$

где $l = \varphi(x^0) - y$ – вектор свободных членов, ε - вектор - столбец случайных ошибок измерении с ковариационной матрицей $K_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^2 P^{-1}$.

Если в геодезических сетях измерения выполнены равноточно, то ковариационная матрица имеет вид:

$$K_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^2 P^{-1}, \tag{4}$$

где P – весовая матрица размера $n \times n$.

В системе уравнений (3) компоненты вектора ε неизвестны, поэтому число неизвестных $n-k$ больше числа уравнений n. Поэтому линейная система уравнений (3) несовместна. Для решения несовместной системы применяют метод наименьших квадратов и переходят к совместной системе нормальных уравнений, которая имеет вид:

$$A^T A \hat{\Delta} + A^T l = 0$$

После решения этой системы получают оценку вектора поправок к приближенным параметрам $\hat{\Delta}$, которая при подстановке в уравнение (3) дает вектор остатков с минимальной нормой:

$$A \hat{\Delta} + l = V \tag{5}$$

Рассмотрим другой метод, основанный на обобщенном решение. Реализуем предлагаемую методику для уравнивания нивелирных сетей с равноточно измеренными величинами. Обобщенное решение системы уравнений (3) дает оценку вектора Δ, которая может быть записана так [1,2]:

$$\tilde{\Delta} = -A' l,$$

где A' – рефлексивно g-обратная матрица с минимальной нормой для A, удовлетворяющая свойствам:

$$A'AA' = A'; \quad (A'A)^T = A'A. \tag{6}$$

Можно считать $\tilde{\Delta}$ обобщенным решением, а матрицу A' обобщеннообратной матрицей к A.

Пусть произвольная прямоугольная матрица представлена в блочном виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где a_j – вектор-столбец высоты n.

На основании доказанной теоремы [2] можно записать рекурсивный алгоритм последовательного обращения матриц, который имеет вид:

$$A'_j = \begin{pmatrix} A'_{j-1} - d_j \cdot b_j^T \\ b_j \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где

$$d_j = A'_{j-1} \cdot a_j, \tag{9}$$

$$b_j = \frac{c^T{}_j}{c_j^T \cdot c_j} a_j, \tag{10}$$

$$c_j = a_j - A_{j-1} \cdot d_j. \tag{11}$$

Процедура начинается с первого столбца $A_1 = a_1$. Так как A_1 состоит из одного столбца, A'_1 находится по следующей формуле:

$$A'_1 = a'_1 = \frac{a_1^T}{a_1^T \cdot a_j} \tag{12}$$

Затем по формулам (8) с учетом формул (9), (10) и (11) последовательно вычисляются A'_2, A'_3, пока не будет получена $A'_k = A'$.

В этих условиях при уравнивании нивелирных сетей присоединение столбцов $a_2, a_3, \cdots, a_{k-1}$ блочной матрицы (7) по формуле (8) b_j будет определяться по формуле (12).

Для присоединения последнего столбца a_k матрицы (7) используем формулу:

$$b_j = \frac{(A'_{j-1})^T \cdot d_j}{1 + d_j^T \cdot d_j} \tag{13}$$

Вектор уравненных значений неизвестных параметров $\tilde{x}$ можно выразить через вектор-столбец приближенных параметров x^0 и вектор-столбец поправок $\tilde{\Delta}$ следующим образом:

$$\tilde{x} = x^0 + \tilde{\Delta}$$

Вектор-столбец уравненных измерений $\tilde{y}$ определяется по формуле:

$$\tilde{y} = y + v$$

Для вычисления среднеквадратических ошибок уравненных параметров воспользуемся известной формулой [2]:

$$m_{\tilde{x}j} = \mu \left\| a_{\tilde{j}} \right\|$$

где $\left\| a_{\tilde{j}} \right\|$ - евклидовая норма для $j-$строки обощенннообратной матрицы A',

μ - среднеквадратическая ошибка единицы веса.

А среднеквадратические ошибки уравненных измерений получим по выражению [2]:

$$m_{\tilde{y}j} = \mu \left\| a_i a_{\tilde{j}} \right\|$$

где a_i - i-ая строка матрицы коэффициентов параметрических уравнений поправок A;

$a_{\tilde{j}}$ - столбец обощенннообратной матрицы A';

$\left\| a_i a_{\tilde{j}} \right\|$ – евклидова норма.

Рассмотрим уравнивание нивелирной сети, представленной на рисунке. Исходные репера имеют отметки: $x_A = 100{,}238$ м. и $x_B = 121{,}322$ м. На основании результатов измерений находятся приближенные значения необходимых параметров (отметок реперов), они равны соответственно:

$$x_1^0 = x_A + y_1 = 110{,}542 м; \qquad x_2^0 = x_B + y_3 = 130{,}674 м;$$

$$x_3^0 = x_1^0 + y_5 = 140{,}750 м; \qquad x_2^0 = x_1^0 + y_6 = 157{,}083 м.$$

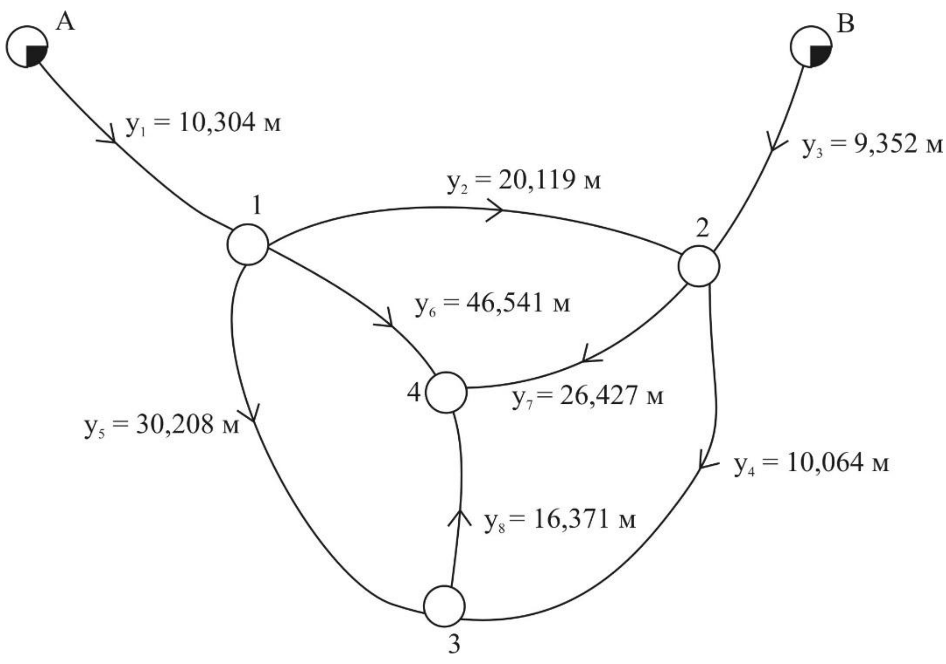

Рис. Несвободная нивелирная сеть

Матрицу коэффициентов параметрических уравнений поправок можно определить уже известным образом и запишем ее транспонированном виде:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

По предложенному алгоритму находится обобщеннообратная матрица $A^{\sim}$, которая равна:

$$\begin{pmatrix} 0{,}02264 & -0{,}20000 & 0{,}02264 & -0{,}00377 & -0{,}20377 & -0{,}22264 & -0{,}02264 & 0{,}01887 \\ 0{,}02264 & 0{,}20000 & 0.22264 & -0{,}20377 & -0{,}00377 & -0{,}02264 & -0{,}22264 & 0{,}01887 \\ 0{,}02830 & 0{,}00000 & 0{,}02830 & 0{,}24528 & 0{,}24528 & -0{,}02830 & -0{,}02830 & 0{,}27358 \\ -0{,}16038 & 0{,}00000 & -0{,}16038 & -0{,}05660 & -0{,}05660 & 0{,}16038 & 0{,}16038 & 0{,}21698 \end{pmatrix}$$

Результаты уравнивания и оценки точности по предложенному методу и методу наименьших квадратов представлены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

№ параметров	Вычисленные параметры	Метод обобщенного решения			Метод наименьших квадратов		
		$\tilde{\Delta}$, м	$\tilde{x}$, м	$m_{\tilde{x}}$, мм	$\hat{\Delta}$, м	$\hat{x}$, м	$m_{\hat{x}}$, мм
1	110,542	0,0015	110,5435	5,116	0,0032	110,5452	9,207
2	130,674	-0,0049	130,6691	5,116	-0,0032	130,6708	9,207
3	140,750	-0,0138	140,7362	5,340	-0,0118	140,7382	11,118
4	157,083	0,0118	157,0948	4,741	0,0148	157,0978	11,118

Таблица 2

№ превышении	Измеренные превышения	Метод обобщенного решения			Метод наименьших квадратов		
		V, м	$\tilde{y}$, м	$m_{\tilde{y}}$, мм	V, м	$\hat{y}$, м	$m_{\hat{y}}$, мм
1	10,304	0,0015	10,3055	5,657	0,0032	10,3072	9,207
2	20,119	0,0066	20,1256	7,583	0,0066	20,1256	7,517
3	9,352	-0,0049	9,3471	5,657	-0,0032	9,3488	9,207
4	10,064	0,0030	10,0670	8,034	0,0034	10,0674	8,192
5	30,208	-0,0154	30,1926	8,034	-0,0150	30,1930	8,192
6	46,541	0,0103	46,5513	7,420	0,0116	46,5526	8,192
7	26,427	-0,0013	26,4257	7,420	-0,0000	26,4270	8,192
8	16,371	-0,0123	16,3587	8,397	-0,0115	16,3595	8,405

Анализируя полученные результаты можно сделать вывод о том, что точность, как уравненных параметров, так и уравненных превышений значительно повышаются с применением предложенного метода по сравнению с методом наименьших квадратов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Барлиани А. Г. Псевдорешение и метод наименьших квадратов // ГЕО-Сибирь-2008. IV Междунар. науч. конгр. : сб. материалов в 5 т. (Новосибирск, 22–24 апреля 2008 г.). – Новосибирск : СГГА, 2008. Т. 1, ч. 1. – С. 160–163.

2. Барлиани А. Г. Разработка алгоритмов уравнивания и оценки точности свободных и несвободных геодезических сетей на основе пседонормального решения: монография / А. Г. Барлиани. – Новосибирск: СГГА, 2010. – 135 с.

3. Падве В. А. Потенциал универсального синтезированного алгоритма МНК-оптимизации геодезических данных // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2011. – № 2. – С. 34–42.

4. Карпик А. П., Каленицкий А. И., Соловицкий А. Н. Новый этап развития геодезии – переход к изучению деформаций блоков земной коры в раионах освоения угольных месторождений // Вестник СГГА. – 2013. – Вып. 3 (23). – С. 3–9.

5. Карпик А. П. Разработка методики качественной и количественной оценки кадастровой информации // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2013. – № 4/С. – С. 137–142.