

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗОНАЛЬНОГО  
РАЗРУШЕНИЯ МАССИВА ВОКРУГ ПОДЗЕМНЫХ ВЫРАБОТОК  
И РЕВЕРСИВНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ  
ОБРАЗЦОВ ГОРНЫХ ПОРОД**

*Ци Чэнчжи* – д.ф.м. н., профессор, заместитель декана строительного и коммуникационного факультета (Пекинский архитектурно-строительный университет, Пекин, КНР)

*Цянь Циху* – академик Китайской инженерной академии (Китайская инженерная академия, Пекин, КНР)

*Ван Минян* – профессор Инженерного Института (Накинский научно-технический университет, Нанкин, КНР)

Когда горное давление превышает предел прочности пород на одноосное сжатие, вокруг выработок возникает явление зональной дезинтеграции. Экспериментально установлено, что эффект смены знака приращения деформаций (реверсивное деформирование) наблюдается в

предварительно нарушенных образцах горных пород в предразрушающей области нагружения при сжатии. Эксперименты показывают, что процесс деформирования горных пород может рассматриваться как многостадийный процесс фазового перехода. В данной работе эти явления исследуются на основе теории размытого фазового перехода. На основе разложения Гинзбурга-Ландау по свободной энергии относительно параметра порядка получено управляющее уравнение относительно параметра порядка. Показаны и обоснованы общая природа эффекта реверсивного деформирования образцов горных пород при сильном сжатии и явления зональной дезинтеграции вокруг выработок на большой глубине.

*Ключевые слова:* зональная дезинтеграция, сильно сжатое состояние, эффект реверсивного деформирования, размытый фазовый переход.

**Mathematical modeling of zone failure of the rock mass around the underground openings and reversible deformation of rock samples.** Qi Chengzhi (Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing, China), Qian Qihu (Chinese Engineering Academy, Beijing, China), Wang Mingyang (Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, China).

When rock mass stresses exceeds strength of rock on uniaxial compression, around the openings there is a phenomenon of zone failure. It is experimentally determined, that the effect of change of a sign on an increment of deformations (reversible deformation) is taken place in preliminary broken samples of rocks in predestroying

loading area at compression. Experiments show, that process of deformation of rocks can be considered as multistage process of phase transition. In the given work these phenomena are investigated on the basis of the theory of fuzzy phase transition. On the basis of Ginzburg-Landau failure on free energy relative to order parameter the operating equation concerning order parameter is constructed. The general nature of the effect of reversible deformation of rocks samples at high stresses and the phenomena of zone failure round the openings on the big depth are shown and proved.

*Key words:* zone failure, high stresses condition, effect of reversible deformation, fuzzy phase transition.

При большой глубине, когда горное давление превышает предел прочности на одноосное сжатие горных пород, вокруг выработок возникает явление зональной дезинтеграции. Аномальность этого явления заключается в локализации трещин отрыва на дискретных зонах массива, чередующихся с зонами относительно не нарушенных пород (рис. 1).

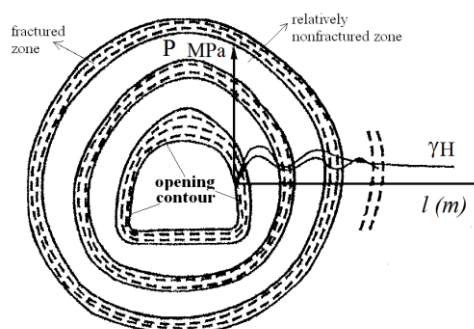


Рис. 1. Зональная дезинтеграция вокруг выработок

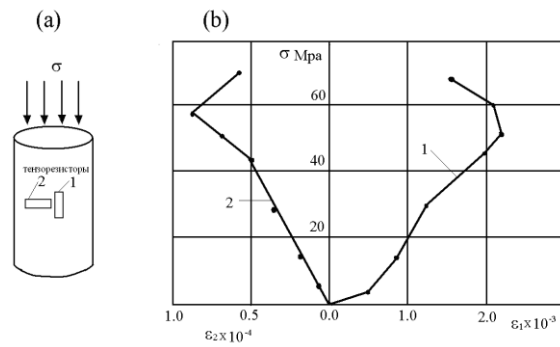


Рис. 2. Образец породы под сжатием (а) и кривые деформирования образца породы (b)

Явление дискретных разрушений впереди лавы выработки впервые обнаружено G.R. Adams [9], и явление зональной дезинтеграции вокруг выработки на большой глубине Е.И. Шемякиным, М.В. Курленей, Ю.С. Кузнецовым, А.Л. Jager и другими [2, 9, 15]. Это явление отличается от упруго-пластического решения данной проблемы, что и вызвало большой интерес у многих исследователей. Систематические *in situ* и экспериментальные исследования проведены Е.И. Шемякиным, М.В. Курленей и другими [5, 10–12, 15]. Эти исследователи и другие считают, что явление зональной дезинтеграции вызвано расклиниванием породы в зоне опорного давления вдоль максимального сжимающего напряжения, при малом боковом давлении [5, 11]. Эксперименты констатируют [5], что из-за существования слабой прослойки между блоками породы деформация не удовлетворяет условию совместности Сен-Венана, условие малости бокового давления всегда может выполняться, и расклинивание осуществимо. В.Н. Одинцев, анализирует явление зональной дезинтеграции с точки зрения геологической структуры [6,

7], считает, что появление зон разрушенности связано с образованием новой устойчивой структуры. Она возникает в квазистатическом процессе деформирования из-за динамики разрушения. Эта новая структура сохраняет устойчивость при последующем нагружении определенного диапазона нагружения. Такой процесс повторяется, в результате чего возникает зональная дезинтеграция. Это явление аналогично пространственно-временной структуре в физико-химических процессах. Рассматривая соотношение между пространственно-временными параметрами, явление зональной дезинтеграции может быть интерпретировано аналогично соответствующим уравнениям квантовой механики. Эксперименты показывают, что процесс деформирования горных пород можно рассматривать как многостадийный размытый фазовый переход [1]. С точки зрения неравновесной термодинамики горные породы на большой глубине находятся в сильно неравновесном состоянии после экскавации выработки. По некоторым источникам, сильно неравновесное состояние приводит к иницированию процесса самоорганизации и образованию диссипативных структур [18], что необходимо учитывать при моделировании.

При исследовании зональной дезинтеграции В.В. Макаров открыл эффект смены знака приращения деформаций образцов горных пород при сильном сжатии [3, 4]. Он и другие исследователи при экспериментах на предварительно поврежденных цилиндрических образцах на сжатие обнаружили, что, когда осевая нагрузка  $\sigma_z$  превышает определенную величину  $\sigma^*$ , с приращением нагрузки появляется смена знака приращения продольных и окружных

деформаций. Для образца, показанного в рис. 2 (а), типичная кривая деформирования образца породы показана на рис. 2(б) [3]. Измерение таких деформаций образцов свидетельствует о том, что существуют две аномалии: «отрицательная аномалия», и «положительная аномалия». Сущность положительной аномалии состоит в том, что одновременно с появлением отрицательного приращения деформаций в определенных участках образца в соседних участках появляется значительное положительное приращение деформаций, которое на 1.5–3 раза больше, чем среднее значение. Рис. 3 демонстрирует разнознаковое приращение деформаций по высоте образца при трехточечной схеме испытания.

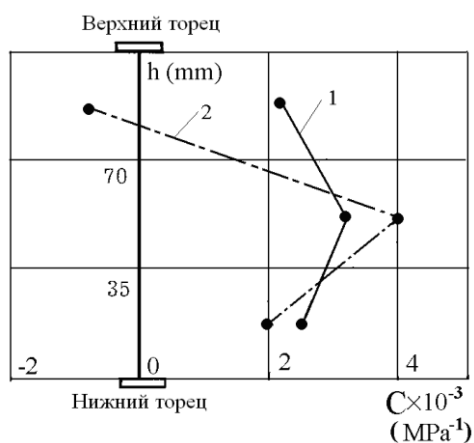


Рис. 3. Разнознаковое приращение деформаций по высоте образца

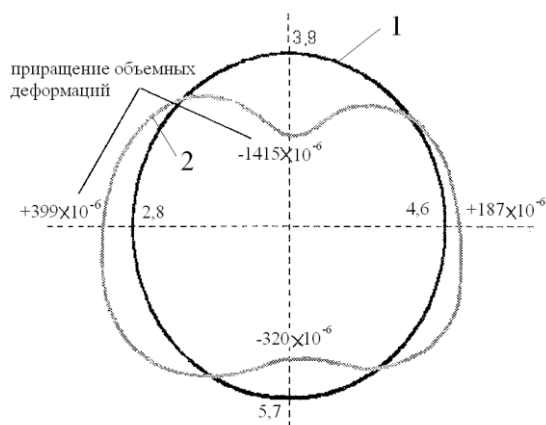


Рис. 4. Периодическое распределение приращения объемных деформаций при трехточечной схеме испытания (кривая 1 соответствует объемных деформаций (кривая 2) по периметру диапазону изменения нагружения 136-144 МПа, а кривая 2 образца (круг 1) – 144 – 150МПа) (абсцисса – приращение деформаций разделенное на приращение напряжения, т.е. податливость) .

При анализе объемных деформаций обнаружен периодический характер изменения приращения объемных деформаций по периметру образца (рис.4) [3]. Экспериментальное и теоретическое исследования показывают, что процессы трещинообразования являются причиной смены знака приращения деформаций [3].

В физике теория фазового перехода второго порядка успешно объяснила сверхпроводимость, сверхтекучесть и явление периодической вихревой структуры в сверхпроводимости второго рода [14, 17, 19]. Если процесс деформирования горных пород является многостадийным размытым фазовым переходом, то его эволюция должна подчиняться законам фазового перехода. Поэтому в данной работе сделана попытка объяснить явление зональной

дезинтеграции с точки зрения фазового перехода.

## Определение большой глубины

### с точки зрения классической теории пластичности

Обсудим напряженно-деформированное состояние горных пород вокруг подземных выработок.

Круглые подземные выработки без крепи подтверждаются внешним нагружением величиной  $\sigma_\infty = \gamma H$ , где  $\gamma$  – плотность горной породы,  $H$  – глубина выработок. В упругом состоянии напряженно-деформированное состояние горных пород вокруг подземных выработок можно выразить следующими выражениями (здесь сжимающие напряжения предполагаются положительными):

$$\sigma_{r/\varphi} = \sigma_\infty \mp (\sigma_\infty - q)(a^2/r^2), \quad \sigma_z = \sigma_\infty \quad (1)$$

$$\varepsilon_{r/\varphi} = \mp \frac{\sigma_\infty a^2}{2\mu_0 r^2}, \quad \varepsilon_z = 0 \quad (2)$$

где  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_z$ ,  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\varphi$ ,  $\varepsilon_z$  – напряжения и деформации в полярной координате  $r, \varphi$  and  $z$ ;  $\sigma_\infty$  – гидростатическое давление в нетронутом горном массиве;  $q$  – внешнее давление, действующее на стенке подземных выработок;  $\mu_0$  – модуль сдвига горных пород;  $a$  – радиус круглой выработки;  $r$  – текущая координата.

В этом случае имеются три взаимноперпендикулярные максимальные сдвигающие напряжения:



$$T = \frac{\sigma_\varphi - \sigma_r}{2}; T_1 = \frac{\sigma_z - \sigma_r}{2}; T_2 = \frac{\sigma_\varphi - \sigma_z}{2} \quad (3)$$

В качестве простого условия пластичности мы принимаем критерий Треска, который изображен на рис. 5, где предел текучести обозначен  $T_0$ , и предел текучести при одноосном сжатии  $\sigma_0$ . С ростом глубины главные сдвигающие напряжения растут постепенно. Когда  $T = T_0$ , пластические деформации впервые появляются на стенке выработок. В этом случае мы имеем

$$T = \frac{\sigma_\varphi - \sigma_r}{2} = \sigma_\infty = T_0 = \frac{\sigma_0}{2}, \quad (4)$$

т.е.

$$\sigma_\infty = T_0 = \sigma_0/2 \quad (5)$$

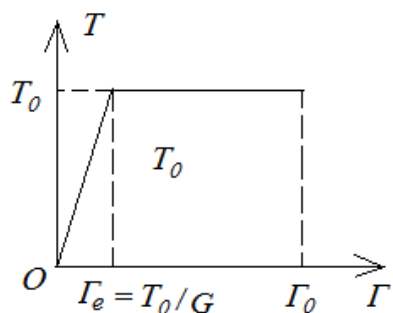


Рис. 5. Зависимость напряжения от деформации для идеальной пластичности

Согласно теории пластичности С.А. Христиановича и Е.И. Шемякина, пластичность считается неполной, если только  $T$  достигает предела текучести [8].

С дальнейшим ростом глубины условие пластичности выполняется и для  $T_1$

$$T_1 = \frac{\sigma_z - \sigma_r}{2} = \frac{\sigma_\infty}{2} = T_0 = \frac{\sigma_0}{2}. \quad (6)$$

В этом случае кроме плоскости  $r, \varphi$ , линии скольжения также появляются в

плоскости  $r, z$ . Такая пластичность называется полной, согласно концепции С.А. Христиановича и Е.И. Шемякина [8]. Горные породы разбиваются на блоки, что делает более ярким проявление геодинамических событий (например, горных ударов). При полной пластичности из (6) получим

$$\sigma_{\infty} = 2T_0 = \sigma_0. \quad (7)$$

Поэтому с точки зрения появления динамических событий большую глубину можно считать глубиной, при которой гидростатическое давление достигает предела прочности при одноосном сжатии.

В качестве управляющего параметра возьмем максимальную деформацию сдвига

$$\Gamma = \varepsilon_r - \varepsilon_{\varphi}. \quad (8)$$

А в качестве модели горных пород принимаем модель идеальной пластичности, согласно которой при достижении сдвигающим напряжением  $T$  предела текучести  $T_e$  горные породы переходят в пластическое состояние. Но эти породы разрушатся только при достижении сдвигом  $\Gamma$  предельного значения  $\Gamma_0$ , т.е. при

$$\Gamma = \Gamma_0. \quad (9)$$

Для хрупких пород  $\Gamma_0 = \Gamma_e$ , где  $\Gamma_e$  – предел упругой деформации.

Когда горные породы вокруг выработок переходят в пластическое состояние, напряжения в горных породах выражаются следующим образом [14]

$$\sigma_r = 2T_0 \ln \frac{r}{a}; \sigma_{\varphi} = 2T_0 \left( \ln \frac{r}{a} + 1 \right). \quad (10)$$

Радиус зоны пластической деформации определяется формулой

$$\left(\frac{c}{a}\right)^2 = e^{\frac{\sigma_\infty - T_0}{T_0}}, \quad (11)$$

т.е. радиус пластической зоны быстро растет с ростом глубины.

В случае, когда  $\sigma_\infty = 2T_0 = \sigma_0$ , из уравнения (11) получим радиус пластической зоны:  $c = 1.65a$ .

На основании упругого изменения объема и гипотезы Кармана перемещения в зоне необратимой деформации определяются следующим образом [13]:

$$U = \frac{T_0(1-2\nu)}{G} r \ln \frac{q}{r} + \frac{D}{r}, \quad (12)$$

где  $D$  – постоянная, которая определяется из условий на границе  $r=c$  с упругой зоной.

На границе  $r=c$  имеем:

$$\Gamma = \varepsilon_\varphi - \varepsilon_r = \Gamma_e = T_0/G. \quad (13)$$

Сдвиг и компоненты деформаций определяются формулами

$$\Gamma = \Gamma_e \left[ -1 + 2\nu + 2(1-\nu) \left(\frac{c}{r}\right)^2 \right] \quad (14)$$

$$\varepsilon_r = \Gamma_e \left[ (1-2\nu) \left(\ln \frac{a}{r} - 1\right) + (1-\nu) \left(\frac{c}{r}\right)^2 \right]; \quad \varepsilon_\varphi = \Gamma_e \left[ (1-2\nu) \ln \frac{a}{r} - (1-\nu) \left(\frac{c}{r}\right)^2 \right] \quad (15)$$

Когда максимальная деформация сдвига достигает своего критического значения  $\Gamma = \Gamma_0$ , стенка выработок начинает разрушаться, в этом случае радиус пластической зоны может определяться из (14)

$$\left(\frac{c_*}{a}\right)^2 = \frac{1}{2(1-\nu)} \left( \frac{\Gamma_0}{\Gamma_e} + 1 - 2\nu \right). \quad (16)$$

Из (16) когда  $\Gamma_0/\Gamma_e = 10$  и  $\nu = 0.3$ , получим  $c_* \approx 2.73a$ . В этом случае имеем

$$\sigma_\infty \approx 3T_0 = 1.5 \sigma_0 \quad (17)$$

Деформация на стенке выработок определяется как:

$$\Gamma_a = \Gamma_e \left[ -1 + 2\nu + 2(1-\nu)e^{\frac{\sigma_\infty - T_0}{T_0}} \right]. \quad (18)$$

### **Особенности деформирования горных пород при внешнем нагружении**

Эксперименты на образцах горных пород показывают, что напряжение в породе, достигнув максимума, начинает падать при продолжающемся росте деформаций из-за возникновения локальных поверхностей скольжения [1]. В этих поверхностях в процессе дальнейшего деформирования постепенно подготавливаются микроразрушения. Можно связывать пластическую деформацию с образованием плоскостей скольжения, которые близки к площадкам действия максимальных касательных напряжений. Поэтому кривые зависимости максимального касательного напряжения  $T$  от максимальной сдвиговой деформации  $\Gamma$  содержат основную информацию о деформировании и разрушении горных пород.

На рис. 6 показаны паспортные зависимости максимального касательного напряжения  $T$  от максимальной сдвиговой деформации  $\Gamma$  (кривая 1) и зависимости относительного изменения объема  $\theta$  от максимальной сдвиговой деформации  $\Gamma$  (кривая 2).

В точке  $T_e$  деформирование переходит от упругого участка ( $\Gamma < \Gamma_e, T < T_e$ ) в участок упрочнения, последний участок переходит в точке ( $\Gamma = \Gamma_0, T = T_0$ ) в участок разупрочнения. После достижения критического сдвига  $T_c$  наступает

разрушение. Объемная деформация уменьшается до предела упругости, после чего постепенно увеличивается.  $\theta \approx 0$  в точке  $(T_0, \Gamma_0)$ . При дальнейшем увеличении деформаций объемная деформация положительна.

На рис. 7 показана кинетика образования микротрещин [18], где  $N/N_{\max}$  – отношение текущего количества трещин  $N$  к максимальному числу трещин  $N_{\max}$  в момент разрушения.

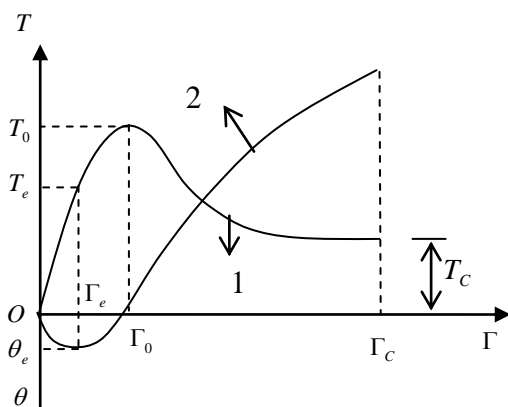


Рис. 6. Кривые  $T(\Gamma)$  и  $\theta(\Gamma)$

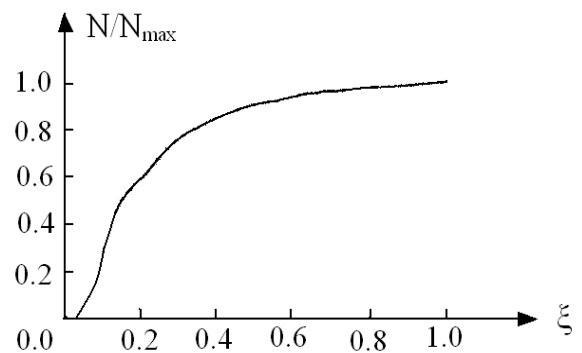


Рис. 7. Зависимость  $N/N_{\max}$  от  $\xi$

$$\xi = \Gamma/\Gamma_c$$

Соотношение  $N/N_{\max}$  можно рассматривать как параметр повреждения  $\omega$ . В области упругих деформаций  $\omega$  растет незаметно. При переходе пластическое состояние  $\omega$  начинает быстро расти. Помимо чисто сдвигового процесса, существенный вклад в деформацию материала дает разрыхление, сопровождающееся потерей связности и наличием поверхностей отрыва. Кроме того, на этапе упрочнения следует ожидать появления локализованных областей, в которых частицы материала измельчаются. В образовавшейся структуре зарождаются ростки новой, более сложной структуры, переход к которой совершается при смене типа устойчивости. Наступает новое состояние, при

котором в материале при дальнейшем росте деформаций происходит падение напряжения. Параметр повреждения в запредельной области быстро возрастает и при появлении магистральных трещин стремится к единице.

Процесс деформирования горных пород можно рассматривать как многостадийный размытый фазовой переход. На рис. 7 видны характерные для размытого фазового перехода особенности. Переход материала в запредельную область сопровождается сменой типа устойчивости, обусловленной сильными структурными флуктуациями. Поэтому наличие на графике точки перегиба, соответствующей пределу прочности материала, вполне предсказуемо.

Такой вывод позволяет нам исследовать зональную дезинтеграцию с помощью теории фазового перехода.

### **Параметр порядка запредельного деформирования**

#### **и управляющее уравнение**

Для описания изменения запредельного состояния горных пород целесообразно ввести параметр порядка:

$$\psi = \frac{\Gamma - \Gamma_e}{\Gamma_C - \Gamma_e} \quad . \quad (19)$$

В горных породах существует структурная иерархия. На каждом уровне имеются структурные ослабленные поверхности – здесь главным образом концентрируются деформации и разрушение горных пород. На каждом уровне раскрытие таких структурных поверхностей пропорционально характерному размеру данного уровня. Естественно предположить, что чем меньше раскрытие структурных поверхностей, т.е. чем меньше характерный размер

данного уровня, тем выше здесь механические характеристики горных пород. При внешнем нагружении разрушение сначала происходит на уровне с большим размером. С увеличением нагрузки деформирование и разрушение постепенно охватывают уровни с меньшим размером.

В физике самой распространенной симметрией является однородность и изотропность пространства. В механике деформируемых твердых тел среда с изотропией обладает свойством симметрии, механическое поведение которой описывается двумя параметрами упругости. При разрушении среды изотропия исчезает, симметрия нарушается. При увеличении внешней нагрузки разрушение происходит в последовательно уменьшающихся структурных уровнях. При первом разрушении формируются блоки самого большого размера. В этом случае глобальная симметрия геосреды нарушается. Но вновь сформировавшиеся блоки можно рассматривать как однородные и изотропные, в этом случае симметрия локализуется в блоках. С дальнейшим ростом нагрузки размеры последовательно сформировавшихся блоков, следовательно, и размеры локальной симметрии постепенно уменьшаются. Поэтому разрушение горных пород можно рассматривать как процесс последовательного нарушения симметрии среды и процесс последовательной локализации симметрии.

Нарушение симметрии сопровождается возникновением необратимой деформации в горной породе, которое сопровождается возникновением диссипации и образованием диссипативной структуры [18]. Деформируемое тело можно рассматривать как статически консервативную систему, которая

обладает общим потенциалом  $H$ .

Предполагая минимум  $H$  при равновесии, можно получить уравнение равновесия в виде

$$\nabla H = 0. \quad (20)$$

Можно принять термодинамический потенциал  $H$  в виде

$$H = V_0 + V_1\psi - \frac{1}{2}V_2\psi^2 + \frac{1}{4}V_4\psi^4 + \dots \quad (21)$$

Согласно особенности размытого фазового перехода мы имеем

$$V_2 > 0, \quad V_3 > 0. \quad (22)$$

Функция (21) должна удовлетворить условию равновесия при  $\psi = 0$ , т.е.

$$\left. \frac{dH}{d\psi} = [V_1 - V_2\psi + V_4\psi^3 + \dots] \right|_{\psi=0} = 0. \quad (23)$$

Из (24) получим  $V_1 = 0$ ; не теряя общности, можно полагать  $V_0 = 0$

При изучении изменения системы при нагружении от 0 до критического значения можно оставить члены  $\psi$  до четвертого порядка:

$$H = -\frac{1}{2}V_2\psi^2 + \frac{1}{4}V_4\psi^4. \quad (24)$$

Когда горная порода находится в предельном состоянии, согласно особенностям критических явлений, корреляционная длина увеличивается, т.е. между частицами породы появилось дальнедействующее взаимодействие. Поэтому необходимо ввести градиентный член в (6) по аналогии с разложением Гинзбурга – Ландау [1]

$$H = -\frac{1}{2}V_2\psi^2 + \frac{1}{4}V_4\psi^4 + \frac{1}{2}C(\nabla\eta)^2, \quad (25)$$

где  $C$ - коэффициент, и  $C > 0$ .

Поэтому общий потенциал системы имеет вид



$$H = -\frac{1}{2}V_2\psi^2 + \frac{1}{4}V_4\psi^4 + \frac{1}{2}C(\nabla\eta)^2. \quad (26)$$

А полная свободная энергия есть

$$\Phi = \int_{\Omega} \left[ -\frac{1}{2}V_2\psi^2 + \frac{1}{4}V_4\psi^4 + \frac{1}{2}C(\nabla\psi)^2 \right] d\Omega. \quad (27)$$

При устойчивом состоянии система выбирает значение параметров, которое делает потенциал минимальным, поэтому функция должна принять минимум.

Варьируя  $\Phi$  относительно  $\psi$ , получим

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= \int_{\Omega} \left[ -V_2\psi\delta\psi + V_4\psi^3\delta\psi + C\nabla\psi \cdot \nabla(\delta\psi) \right] d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \delta\psi \left[ -V_2\psi + V_4\psi^3 \right] d\Omega + \int_{\Omega} C\nabla\psi \nabla(\delta\psi) d\Omega. \end{aligned} \quad (28)$$

Из-за

$$\nabla(\nabla\psi \cdot \delta\psi) = \nabla^2\psi \cdot \delta\psi + \nabla\psi \cdot \nabla(\delta\psi)$$

мы имеем

$$\nabla\psi \cdot \nabla(\delta\psi) = \nabla(\nabla\psi \cdot \delta\psi) - \nabla^2\psi \cdot \delta\psi. \quad (29)$$

Применяя для первого члена в правой стороне (29) метод интегрирования по частям и теорему Гаусса – Остроградского, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} C\nabla\psi \cdot \nabla(\delta\psi) d\Omega &= \\ &= \int_{dS} \delta\psi (C\nabla\psi) \vec{n} dS - \int_{\Omega} C\nabla^2\psi \cdot \delta\psi d\Omega \end{aligned} \quad (30)$$

где первый член в правой стороне (30) является поверхностным интегрированием,  $dS$  – элемент поверхности, а  $d\Omega$  – объемный элемент.

Подставляя (30) в (28), получим

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= \int_{\Omega} \delta\psi \left[ -V_2\psi + V_4\psi^3 \right] d\Omega + \int_{\Omega} C\nabla\psi \nabla(\delta\psi) d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \delta\psi \left[ -V_2\psi + V_4\psi^3 - C\nabla^2\psi \right] d\Omega + \int_{dS} C\delta\psi [(\nabla\psi) \vec{n}] dS = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Так как (31) справедливо для любой величины  $\delta\psi$  и для любой точки в теле, мы имеем

$$V_2\psi - V_4\psi^3 + C\nabla^2\psi = 0 \quad (32)$$

с граничным условием

$$(\nabla\psi) \cdot \vec{n} = 0. \quad (33)$$

Если в уравнении (32) только сохранить линейный член, то получим следующее уравнение:

$$\nabla^2\psi + D\psi = 0 \quad (34)$$

с граничным условием (33), где  $D = V_2/C$ .

### **Моделирование реверсивного деформирования образцов горных пород**

Согласно условиям испытания [3], торцовые поверхности тщательно полированы на шлифовальных кругах с добавлением абразивных порошков. Если знаками  $r, \theta, z$  обозначены радиальная, окружная и аксиальная координаты, то граничные условия можно написать следующим образом [13]:

$$\sigma_z|_{z=0,h} = -\sigma, \tau_{zr}|_{z=0,h} = 0, \tau_{z\theta}|_{z=0,h} = 0; \sigma_r|_{r=a} = 0, \tau_{r\theta}|_{r=a} = 0, \tau_{rz}|_{r=a} = 0. \quad (35)$$

Напряженное состояние, удовлетворяющее уравнениям равновесия и граничным условиям, равно

$$\sigma_z = -\sigma, \sigma_r = \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = \tau_{rz} = \tau_{z\theta} = 0 \quad . \quad (36)$$

Когда нагрузка  $\sigma_z$  меньше критического значения  $\sigma^*$ , поведение материала подчиняется закону Гука, и ненулевые компоненты деформации определяются следующим образом:

$$\varepsilon_z = -\frac{\sigma}{E}, \varepsilon_\theta = \nu \frac{\sigma}{E} \quad \varepsilon_r = \nu \frac{\sigma}{E}, \quad (37)$$

где  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Два максимальных сдвиговых напряжения равны

$$T = \frac{\sigma_\theta - \sigma_z}{2} = \frac{\sigma}{2} = T_{23} = \frac{\sigma_r - \sigma_z}{2}. \quad (38)$$

А соответствующие две максимальные сдвиговые деформации определяются следующим образом:

$$\Gamma = \varepsilon_\theta - \varepsilon_z = (1 + \nu) \frac{\sigma}{E} = \Gamma_{23} = \varepsilon_r - \varepsilon_z. \quad (39)$$

Из уравнений (4), (5) видно, что, два максимальных сдвиговых напряжений равны между собой, как и соответствующие деформации. С ростом нагрузки они достигают критических значений одновременно. Поэтому использование единого параметра порядка  $\psi$  для описания запредельного поведения горных образцов является правомерным.

В цилиндрической координате при осесимметричном напряженно-деформационном состоянии (34) и (33) выглядят

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial \psi}{r \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + D^2 \psi = 0 \quad (40)$$

$$(\nabla \psi) \cdot \vec{n}|_{r=R} = 0, \quad (\nabla \psi) \cdot \vec{n}|_{z=0,h} = 0. \quad (41)$$

Для решения уравнения (40) используем метод разделения переменных [19].

Выражаем параметр порядка в форме произведения трех функций:  $\psi(r, \theta, z) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot Z(z)$ , после подстановки чего в уравнение (40) получим 3 независимые уравнения

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \lambda Z = 0 \quad (42)$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{\partial R}{r \partial r} + \left( D^2 - \lambda - \frac{\mu}{r^2} \right) R = 0, \quad (43)$$

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \mu \Theta = 0. \quad (44)$$

где  $\lambda, \mu$  — коэффициенты, которые не зависят от координат  $r, \theta, z$ .

Решение уравнения (44) имеет вид

$$\Theta(\theta) = A \sin \sqrt{\mu} \theta + B \cos \sqrt{\mu} \theta. \quad (45)$$

Используем условие периодичности  $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$  и  $\Theta'(0) = \Theta'(2\pi)$ , получим

$$\mu = m^2, m = 0, 1, 2, \dots \quad (46)$$

Поэтому уравнение (45) приобретает вид

$$\Theta(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} (A_m \sin m\theta + B_m \cos m\theta), \quad (47)$$

где  $A_m, B_m$  — коэффициенты.

Решение уравнения (42) имеет следующий вид:

$$Z(z) = P \sin \sqrt{\lambda} z + Q \cos \sqrt{\lambda} z \quad (48)$$

где коэффициенты  $P, Q$  определяются из граничных условий

$$Z'(0) = 0, \quad Z'(h) = 0$$

$$P = 0, \quad \lambda = \left( \frac{n\pi}{h} \right)^2, n = 0, 1, 2, \dots \quad (49)$$

Поэтому уравнение (21) становится

$$Z(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \cos \frac{nz\pi}{h}, \quad (50)$$

где  $Q_n$  — коэффициенты.

Для уравнения (43) введем новые переменные:  $\rho = \sqrt{D^2 - \lambda} \cdot r = kr$ , где  $k = \sqrt{D^2 - \lambda}$ ,  $y(\rho) = R(r)$ , получим

$$\frac{\partial^2 y_m}{\partial \rho^2} + \frac{\partial y_m}{\rho \partial \rho} + \left(1 - \frac{m^2}{\rho^2}\right) y_m = 0, \quad (51)$$

где  $y_m$  является соответствующей параметру  $m$  величиной  $y(\rho)$ .

Уравнение (51) является уравнением Бесселя  $m$ -го порядка, решение которого имеет следующий вид:

$$y_m(\rho) = c_{m1} J_m(\rho) + c_{m2} N_m(\rho), \quad (52)$$

где  $J_m$  и  $N_m$  являются функциями Бесселя и Неймана  $m$ -го порядка.

Из условия ограниченности величины  $y(\rho)$  при  $\rho = 0$  получим

$$c_{m2} = 0. \quad (53)$$

Общее решение уравнения (51)  $y(\rho)$  является суперпозицией всех решений уравнений (25) по  $m$ .

$$y(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} y_m(kr) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{m1} J_m(kr) = R(r) \quad (54)$$

Согласно граничным условиям на поверхности образца:

$$y'(\rho) \Big|_{\rho=\rho_a} = 0 \quad \text{при } \rho = \sqrt{D^2 - \lambda} \cdot a = \rho_a$$

получим

$$\cdot y'(\rho_a) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{m1} J'_m(\rho_a) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{m1} \left[ J_{m-1}(\rho_a) - \frac{m}{\rho} J_m(\rho_a) \right] = 0 \quad (55)$$

Таким образом, можно определить  $\rho_a$ , а затем  $D$ .

Поэтому общее решение уравнения (40) можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} [c_{m1} (A_m \sin m\theta + B_m \cos m\theta) J_m(kr)] \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} Q_n \cos \frac{nz\pi}{h} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} [(A'_m \sin m\theta + B'_m \cos m\theta) J_m(kr)] \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} Q_n \cos \frac{nz\pi}{h} \end{aligned} \quad (56)$$

где  $A'_m$ ,  $B'_m$  – коэффициенты.

Для описания дилатансии горных пород можно принять пропорциональное соотношение между объемной деформацией и сдвигом следующим образом [20]:

$$\varepsilon_V = \Lambda \psi, \quad (57)$$

где  $\Lambda$  – коэффициент пропорциональности.

Для фиксированной вертикальной координаты  $z$  на поверхности образца  $r=a$ , если принять вертикальную ось на рис. 3 как начало отсчета угловой координаты, можно принять 5 гармоник для аппроксимации распределения объемной деформации по периметру образцу.

$$\varepsilon_V = \Lambda \psi = -(348 \cos \theta - 106 \sin \theta + 580 \cos 2\theta + 200 \cos 3\theta + 287 \cos 4\theta) \times 10^{-3}. \quad (58)$$

Некоторые результаты расчета по формуле (57) показаны в таблице 1 и изображены на рис. 6 кривой 3. Как видно из рис. 3, аппроксимация достаточно хорошая.

Таблица 1

**Некоторые результаты расчета**

|                          |       |      |       |       |     |     |      |     |     |
|--------------------------|-------|------|-------|-------|-----|-----|------|-----|-----|
| $\theta(^{\circ})$       | 0     | 30   | 45    | 90    | 120 | 150 | 180  | 210 | 240 |
| 270                      | 315   | 330  | 345   | 360   |     |     |      |     |     |
| $\varepsilon_V(10^{-3})$ | -1415 | -394 | 257   | 399   | 500 | 208 | -320 | 8   | 316 |
| 187                      | 107   | -500 | -1150 | -1415 |     |     |      |     |     |

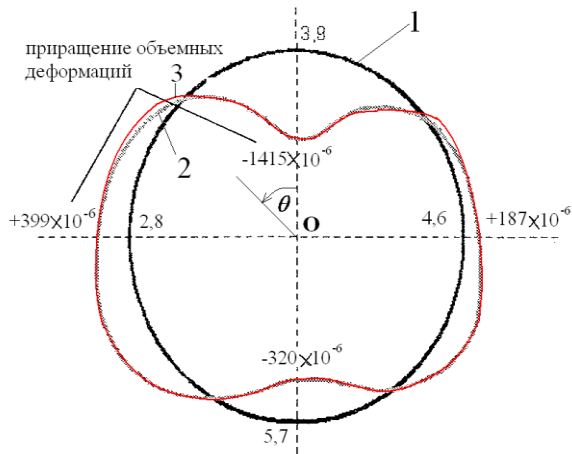


Рис. 8. Сравнение результатов расчета по (58) (кривая 3) с экспериментальными данными (кривая 2)

Рассмотрим аппроксимацию распределения деформации по высоте образца. Мы приняли относительный сдвиг как параметр порядка, а экспериментальные данные являются аксиальной деформацией  $\varepsilon_z$  и окружной деформацией  $\varepsilon_\theta$ . Для аппроксимации экспериментальных данных нужно делать некоторое упрощение. Из рис. 2 (b) видно, что в определенной точке на поверхности образца приращения вертикальной деформации  $\Delta\varepsilon_z$  и окружной деформации  $\Delta\varepsilon_\theta$  имеют противоположные знаки, но примерно пропорциональны по величине. Поэтому можно принять следующее соотношение:

$$\Delta\varepsilon_\theta = -\eta\Delta\varepsilon_z, \quad (59)$$

где  $\eta$  — коэффициент пропорциональности.

Из-за того, что  $\Delta\Gamma = \Delta\varepsilon_\theta - \Delta\varepsilon_z$ , мы имеем

$$\Delta\varepsilon_z = k\Delta\Gamma, \quad (60)$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности.

Для фиксированной угловой координаты  $\theta$ , поскольку датчики расположены

в 3 точках по высоте, то согласно решению (56) для аппроксимации кривых 1 и 2 на рис. 3 достаточно сохранить 3 члена:

$$\frac{\Delta\varepsilon_z(z)}{\Delta\sigma_z} = \left( H_0 + H_1 \cos \frac{z\pi}{h} + H_2 \cos \frac{2z\pi}{h} \right) \cdot 10^{-3}. \quad (61)$$

После расчета получим следующее выражение для аппроксимации кривой 1

$$\frac{\Delta\varepsilon_z(z)}{\Delta\sigma_z} = \left( 2.63 + 0.173 \cos \frac{z\pi}{h} - 0.57 \cos \frac{2z\pi}{h} \right) \cdot 10^{-3}. \quad (62)$$

и изображено кривой 3 на рис. 9

Для кривой 2 мы имеем следующее выражение для аппроксимации

$$\frac{\Delta\varepsilon_z(z)}{\Delta\sigma_z} = \left( 1.733 + 1.617 \cdot \cos \frac{z\pi}{h} - 2.267 \cdot \cos \frac{2z\pi}{h} \right) \cdot 10^{-3} \quad (63)$$

и изображено как кривая 4 на рис. 9.

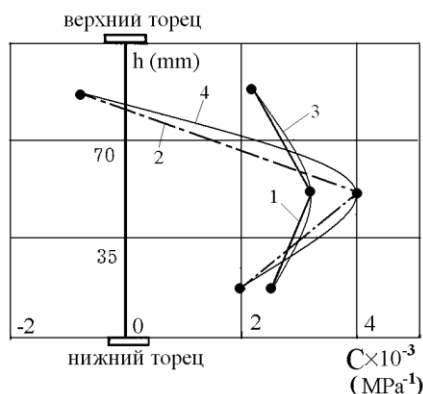


Рис. 9 Сравнение результатов по уравнению (62) (кривая 3) и уравнению (63) (кривая 4) с соответствующим экспериментальным данным (кривые 1, 2)

Из результатов физического моделирования эффекта смены знака приращения деформаций видно, что подход теории размытого фазового перехода достаточно хорошо описывает закритическую деформационную аномальность пород.



## Моделирование зонального разрушения массива вокруг подземных

Для круглой выработки при осесимметричном напряженно-деформационном состоянии (34) выглядит

$$\left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial \psi}{r \partial r} \right) + D^2 \psi = 0. \quad (64)$$

Уравнение (64) является однородным уравнением Бесселя, решение которого имеет вид [19]

$$\psi = C_1 J_0(Dr) + C_2 N_0(Dr), \quad (65)$$

где  $J_0$  и  $N_0$  – функция Бесселя нулевого порядка и функция Неймана нулевого порядка соответственно (цилиндрические функции); а  $C_1$  и  $C_2$  – подгоночные параметры.

В полярной системе координат граничное условие (33) имеет вид

$$\partial \psi / \partial r|_{r=a} = 0. \quad (66)$$

Далее используем следующие итерационные соотношения

$$\frac{d}{Ddr} [J_0(Dr)] = -J_1(Dr), \quad \frac{d}{Ddr} [N_0(Dr)] = -N_1(Dr)$$

из (66) получим

$$\partial \psi / \partial r|_{r=a} = -D[C_1 J_1(Da) + C_2 N_1(Da)] = 0,$$

То есть

$$C_2 = -C_1 J_1(Da) / N_1(Da).$$

Сдвиговая деформация не имеет положительного или отрицательного знаков, поэтому мы можем принять абсолютную величину параметра  $\psi$

$$\psi = \left| C_1 \left[ J_0(Dr) - \frac{J_1(Da)}{N_1(Da)} \cdot N_0(Dr) \right] \right| \quad (67)$$

Из  $\psi = (\Gamma - \Gamma_e) / (\Gamma_c - \Gamma_e)$  вытекает

$$\Gamma = \psi(\Gamma_c - \Gamma_e) + \Gamma_e. \quad (68)$$

Выбор параметра  $c_1$  осуществляется таким образом, что на краю выработки решение (68) совпадает с упругопластическим решением. Параметр  $D$  зависит от радиуса выработки и подбирается таким образом, чтобы период функции  $\psi$  был равен расстоянию от края выработки до первой зоны дезинтеграции.

Принимая  $Da = 3.2$  (i.e.  $D = 3.2/a$ ),  $\nu = 0.3$ ,  $\Gamma_c / \Gamma_e = 10$ ,  $\sigma_\infty = 3T_0 = 1.5 \sigma_0$ , по условию

$$\Gamma(a) = \left| C_1 \left[ J_0(Dr) - \frac{J_1(Da)}{N_1(Da)} \cdot N_0(Dr) \right] \right| (\Gamma_c - \Gamma_e) + \Gamma_e = 10\Gamma_e, \quad (40)$$

получим  $c_1 \approx 1.862$ .

Далее из (68) определяем распределение деформации в массиве вокруг выработок. Результаты расчета показаны на рис. 5, где решение (68) обозначено кривой 1, а решение по идеальной пластической модели изображено кривой 2. Если в качестве первого приближения считаем, что область появления зональной дезинтеграции ограничена областью необратимых деформаций, то из рис. 5 видно, что кроме зоны разрушения вблизи стенки выработки имеется еще одна зона дезинтеграции. Этот результат совпадает с экспериментальными данными [10].

Такой результат может показаться абсурдным с первого взгляда, потому что слаборазрушенная зона имеет деформацию, равную величине деформации при

пределе упругости. Но эксперименты действительно показывают, что участки массива, расположенные между зонами дезинтеграции, нарушены значительно слабо, и трещины в них расположены хаотически. При разборке моделей создается впечатление, что трещины на этих участках возникли позднее, в результате перемещения их в сторону выработки [4].

Необходимо подчеркнуть, что образование узора деформаций является популярным в процессе деформирования материалов. Экспериментальные наблюдения, представленные в технической литературе, убедительно показывают, что в макроскопически однородных областях материала при поверхностном нагружении развиваются неоднородные и часто высоколокализованные поля деформаций, что противоречит прогнозированию локальных теорий [21]. Поэтому образование зональной дезинтеграции является не случайным, это реализация общего закона деформирования материалов. Совместное использование классических упругопластических теорий и общих законов физики позволяет понять явление зональной дезинтеграции более глубоко.

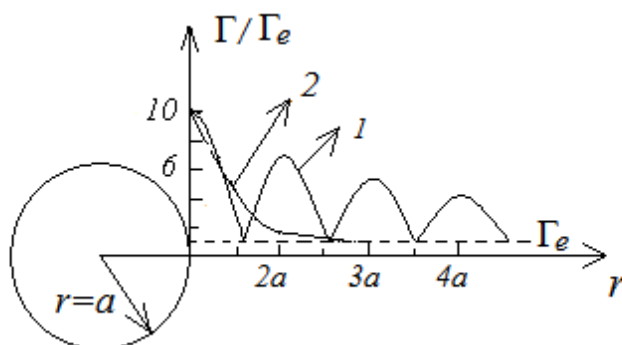


Рис. 11. Пластическая деформация сдвига в породе вокруг выработки

Таким образом, в работе показана единая природа явлений зональной дезинтеграции и реверсивного деформирования образцов горных пород.

**Финансовая поддержка: национальный научный фонд Китая (NSFC)(No.50825403), Пекинский научный фонд (No.KZ200810016007).**

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адигамов Н.С., Рудаев Я.И. Уравнение состояния, учитывающие разупрочнение материала // ФТПРПИ. Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых, 1996. № 4. С. 24-32.
2. Глушихин Ф.П., Кузнецов Г.Н., Шклярский М.Ф. и др. Моделирование в геомеханике. М.: Недра, 1991. 240 с.
3. Гузев М.А., Макаров В.В. Деформирование и разрушение сильно сжатых горных пород вокруг выработок. Владивосток: Дальнаука, 2007. 232 с.
4. Гузев М.А., Макаров В.В., Ушаков А.А. Моделирование поведения сжатых горных образцов в предразрушающей области // ФТПРПИ. 2006. № 5. С. 3-13.
5. Курленя М.В., Опарин В.Н. и др. О расклинивающем эффекте зон опорного давления // ФТПРПИ. 1995. № 3. С. 7-17.
6. Одинцев В.Н. О механизме зональной дезинтеграции массива горных пород вблизи глубоких выработок // ФТПРПИ. 1994. № 4. С. 10-19.
7. Одинцев В.Н. Отрывное разрушение массива горных пород. М.: ИПКОН РАН 1996. 166 с.
8. Христианович С.А., Шемякин Е.И. К теории идеальной пластичности // Механика Твёрдого Тела. 1967. № 4. С. 86- 97.
9. Шемякин Е.И., Фисенко Г.Л., Курленя М.В., Опарин В.Н. и др. Зональной дезинтеграции горной породы вокруг подземных выработок. Ч. 1. Данные натурных наблюдений // ФТПРПИ. 1986. № 3. С. 3-15.
10. Шемякин Е.И., Фисенко Г.Л., Курленя М.В., Опарин В.Н. и др. Зональной дезинтеграции горной породы вокруг подземных выработок. Ч. II: Разрушение горных пород на моделях из эквивалентных материалов. ФТПРПИ // 1986. № 4. С. 3-13.
11. Шемякин Е.И., Фисенко Г.Л., Курленя М.В., Опарин В.Н. и др. Зональная

дезинтеграция горных пород вокруг подземных выработок. Ч. III. Теоретическое представление // ФТПРПИ. 1987. № 1. С. 3-8.

12. Шемякин Е.И., Фисенко Г.Л., Курленя М.В., Опарин В.Н. Зональная дезинтеграция горных пород вокруг подземных выработок. Ч. IV. Практические приложения // ФТПРПИ. 1989. № 4. С. 3-9.

13. Шемякин Е.И. Две задачи механики горных пород, связанные с освоением глубоких месторождений руды и угля. ФТПРПИ. 1975. № 6. С. 29-45.

14. Abrikosov A.A. Nobel lecture: Type II superconductor and the vortex lattice // Rev. of Modern Physics. 2004. V. 76. P. 975-979.

15. Adams G.R., Jager A. J. Petroscopic observations of rock fracturing ahead of stop faces in deep-level gold mines // J. of The South Africa Institute of Mining and Metallurgy. 1980. V. 80. N 6. P. 204-209.

16. Asmar N.H. Partial differential equation with Fourier series and boundary value problems. Beijing: China Machine Press, 2005. 252 p.

17. Ginzburg V.L. Nobel lecture: On superconductivity and superfluidity as well as on the “physical minimum” at the beginning of the XXI century // Rev. of Modern Physics. 2004. V. 76. P. 981-998.

18. Haken H. Advanced synergetics. Berlin: Springer-Verlag, 1983. 384 p.

19. Landau L.D., Lifshits E.M. Statistical physics / Physical Institute. Beijing: Beijing World Publishing Corporation, 1999. 252 p.

20. Nikolaevsky V. N. Mechanics of porous and fractured media. Singapore: World Science, 1990. 284 p.

21. Valanis K.C. A gradient thermodynamic theory of self-organization // Acta Mechanica. 1998. N 127. P. 1-23