

ТЕПЛОВАЯ КОНВЕКЦИЯ В ЯДРЕ ЗЕМЛИ С УЧЕТОМ ДЖОУЛЕВОЙ ДИССИПАЦИИ

С.В. Соловьев

Политехнический университет, г. Томск

Исследуется тепловая конвекция электропроводящей жидкости в ядре Земли с учетом внутренних источников тепла и джоулевой диссипации. Сделаны оценки влияния внутренних источников тепла и джоулевой диссипации на структуру конвективного течения и поле температуры.

Ключевые слова: тепловая конвекция, электропроводящая жидкость, ядро, Земля.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Математическая постановка задачи естественно-конвективного теплообмена электропроводящей жидкости в безразмерной форме (используется приближение Буссинеска) описывается системой дифференциальных уравнений [3,2]

$$\frac{1}{\text{Ho}} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} + (\mathbf{v}\nabla)\vartheta = \frac{1}{\text{Pe}} (\Delta\vartheta + Q_v + J(\text{rot } \mathbf{B})^2), \quad (1)$$

$$\frac{1}{\text{Ho}} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\text{Eu}\nabla p + \frac{S}{\text{Re}_m} (\text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g} \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \vartheta \quad (2)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{\text{Ho}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau} = \text{rot } (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\text{Re}_m} \Delta \mathbf{B}, \quad (4)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (5)$$

Последнее слагаемое в правой части уравнения (1) определяет диссипацию тепла в жидкости в результате ее конечной проводимости (джоулева диссипация). Постоянная величина J в уравнении (1) принимает различные значения в зависимости от типа граничных условий для температуры.

В переменных вихрь – функция тока – температура система уравнений (1)–(5) имеет следующий вид:

$$\frac{1}{\text{Ho}} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\text{Pe}} \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \theta^2} + \frac{\text{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} + Q_v \right) - \frac{J}{\text{Pe}} \left(\frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} B_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right)^2 = 0, \quad (6)$$

$$\frac{1}{\text{Ho}} \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{\omega}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \omega \text{ctg} \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} + \frac{\text{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{\omega}{r^2 \sin^2 \theta} \right) - \frac{S}{\text{Re}_m} \left(B_r \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r^2} + 2 \frac{B_r}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} - \frac{B_r}{r} \frac{\partial^2 B_r}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} + \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{2 B_\theta}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} - \frac{B_\theta}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{\text{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\omega r \sin \theta \quad (8)$$

Обозначения: ϑ , $\mathbf{V} = V/u_0$, $\mathbf{B} = B/B_0$, $t = \tau/\tau_0$ – безразмерные температура, скорость, магнитная индукция и время; $\text{Eu} = \frac{P_0}{\rho_0 u_0^2}$ – число Эйлера; $\text{Re} = \frac{u_0 r_1}{\nu}$ – число Рейнольдса; $\text{Pe} = \frac{u_0 r_1}{a}$ – число Пекле; $\text{Ho} = \frac{u_0 t_0}{r_1}$ – число гомохронности; $\text{Re}_m = \frac{u_0 r_1}{D_m}$, $S = \frac{\sigma B_0^2 r_1}{\rho_0 u_0}$ – магнитное число Рейнольдса и параметр магнитного взаимодействия; λ – коэффициент теплопроводности вещества жидкого ядра Земли; r_1 – размерный текущий радиус внутренней сферы; R_0 – безразмерный радиус внешней сферы; P_0 , ρ_0 , u_0 , t_0 – характерные масштабы соответствующих величин: давления, плотности, скорости и времени. Индексы: 0 – масштабы величин; m – магнитный; 1, 2 – значения параметров на внутренней и внешней границах; in – внутренний; out – внешний, α – индекс суммирования.

$$\frac{1}{\text{Ho}} \frac{\partial B_r}{\partial \tau} - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{B_\theta}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + B_r \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) = \frac{1}{\text{Re}_m} \times$$

$$\times \left(\frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \theta^2} + \frac{\text{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} - \frac{2B_r}{r^2} - \frac{2B_\theta \text{ctg} \theta}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \right), \quad (9)$$

$$\frac{1}{\text{Ho}} \frac{\partial B_\theta}{\partial \tau} - \frac{1}{r \sin \theta} \left(-B_r \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \theta} + \frac{B_\theta}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) =$$

$$= \frac{1}{\text{Re}_m} \left(\frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\text{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} - \frac{B_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right). \quad (10)$$

Для температуры рассматривались граничные условия первого и второго родов:

- граничные условия первого рода

$$\vartheta|_{\Gamma_1} = 1; \vartheta|_{\Gamma_2} = 0, \quad (11)$$

где

$$\vartheta = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2}; \text{Gr} = \frac{g\beta(T_1 - T_2)r_1^3}{v^2};$$

$$Q_v = \frac{q_v r_1^2}{\lambda(T_1 - T_2)}; J = \frac{D_m}{4\pi} \frac{r_1^2}{\lambda(T_1 - T_2)}; \quad (12)$$

- граничные условия вида (подвод тепла на внутренней границе и задание температуры на внешней границе)

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial r}|_{\Gamma_1} = -1; \vartheta|_{\Gamma_2} = 0. \quad (13)$$

Здесь

$$\vartheta = \frac{T - T_2}{q_1 r_1'} \lambda; \text{Gr} = \frac{g\beta q_1 r_1'^4}{v^2 \lambda};$$

$$Q_v = \frac{q_v r_1'}{q_1}; J = \frac{D_m}{4\pi} \frac{r_1'}{q_1}; \quad (14)$$

- граничные условия вида (задание температуры на внутренней границе и теплового потока на внешней границе)

$$\vartheta|_{\Gamma_1} = 0; \frac{\partial \vartheta}{\partial r}|_{\Gamma_2} = \pm 1$$

("+1" в случае подвода тепла и "-1" – в случае отвода). \quad (15)

Здесь

$$\vartheta = \frac{T - T_1}{q_2 r_1'} \lambda; \text{Gr} = \frac{g\beta q_2 r_1'^4}{v^2 \lambda};$$

$$Q_v = \frac{q_v r_1'}{q_2}; J = \frac{D_m}{4\pi} \frac{r_1'}{q_2}. \quad (16)$$

На оси симметрии

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \theta}|_{\theta=0,\pi} = 0. \quad (17)$$

Граничные условия для вихря и функции тока имеют следующий вид:

$$\Psi|_{\Gamma_{1,2}} = \Psi|_{\theta=0,\pi} = \omega|_{\theta=0,\pi} = 0. \quad (18)$$

Граничные условия для вихря на границах предполагают линейное изменение его [1].

Для магнитной индукции задаются граничные условия первого рода:

$$B_r|_{\Gamma_1} = B_r|_{\Gamma_2} = 0; B_\theta|_{\Gamma_1} = -0,01 \sin \theta;$$

$$B_\theta|_{\Gamma_2} = 0,01 \sin \theta. \quad (19)$$

На оси симметрии граничные условия для радиальной и меридиональной составляющих магнитной индукции имели вид

$$\frac{\partial B_r}{\partial \theta}|_{\theta=0,\pi} = \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta}|_{\theta=0,\pi} = 0. \quad (20)$$

При решении нестационарного варианта задачи в качестве начальных условий для всех рассчитываемых полей задавались нулевые значения. Однако для поля температуры дополнительно в качестве начального условия могло быть задано аналитическое решение $\vartheta(r)$ одномерного стационарного уравнения теплопроводности.

Решение задачи осуществлялось методом конечных элементов. Для аппроксимации рассчитываемых полей использовались билинейные конечные элементы (рис. 1). Пробные решения задаются в форме

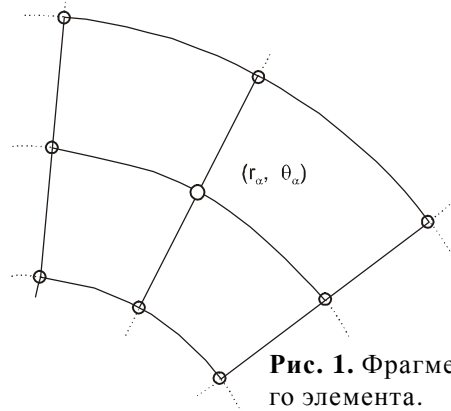


Рис. 1. Фрагмент конечно-го элемента.

$$\begin{aligned}
\vartheta(r, \theta) &= \sum_{\alpha} \vartheta_{\alpha} N_{\alpha}(r, \theta); \\
\psi(r, \theta) &= \sum_{\alpha} \psi_{\alpha} N_{\alpha}(r, \theta); \\
\omega(r, \theta) &= \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} N_{\alpha}(r, \theta); \\
B_r(r, \theta) &= \sum_{\alpha} B_{r\alpha} N_{\alpha}(r, \theta); \\
B_{\theta}(r, \theta) &= \sum_{\alpha} B_{\theta\alpha} N_{\alpha}(r, \theta).
\end{aligned} \tag{21}$$

Здесь N_{α} функции формы. Дискретный аналог системы дифференциальных уравнений (6)–(10) был получен с применением метода взвешенных невязок. По времени использовалась неявная схема.

Дискретный аналог уравнения (6) представлен системой нелинейных уравнений вида

$$\begin{aligned}
\vartheta_{\alpha}^{\circ} K_{\alpha}^{\circ} + \sum_{\beta} \vartheta_{\beta} K_{\alpha\beta}^{\vartheta} + \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \left[\vartheta_{\beta} \psi_{\gamma} K_{\alpha\beta\gamma}^{\vartheta\psi} + \right. \\
\left. + B_{\theta\beta} B_{\theta\gamma} K_{\alpha\beta\gamma}^{B_{\theta}B_{\theta}} + B_{\theta\beta} B_{r\gamma} K_{\alpha\beta\gamma}^{B_{\theta}B_r} + B_{r\beta} B_{\theta\gamma} K_{\alpha\beta\gamma}^{B_rB_{\theta}} + B_{r\beta} B_{r\gamma} K_{\alpha\beta\gamma}^{B_rB_r} \right] = K_{\alpha},
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\text{где } K_{\alpha}^{\circ} = -\frac{1}{\text{Ho}\Delta\tau} \int_0^1 \int_0^{\pi} r N_{\alpha} d\theta dr$$

$$\begin{aligned}
K_{\alpha\beta}^{\vartheta} &= \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\text{Ho}\Delta\tau} \int_0^1 \int_0^{\pi} r N_{\alpha} d\theta dr - \\
&- \frac{1}{\text{Pe}} \int_0^1 \int_0^{\pi} \left(N_{\alpha} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial r} - r \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial r} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial r} - \right. \\
&\left. - \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \theta} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} + \text{ctg}\theta N_{\alpha} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} \right) d\theta dr,
\end{aligned}$$

$\delta_{\alpha\beta}$ - символ Кронекера,

$$K_{\alpha\beta\gamma}^{\vartheta\psi} = \int_0^1 \int_0^{\pi} \frac{N_{\alpha}}{r \sin\theta} \left(\frac{\partial N_{\gamma}}{\partial \theta} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial r} - \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial r} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} \right) d\theta dr,$$

$$K_{\alpha\beta\gamma}^{B_{\theta}B_{\theta}} = -\frac{J}{\text{Pe}} \int_0^1 \int_0^{\pi} r N_{\alpha} \left(\frac{\partial N_{\beta}}{\partial r} + \frac{1}{r} N_{\beta} \right) \left(\frac{\partial N_{\gamma}}{\partial r} + \frac{1}{r} N_{\gamma} \right) d\theta dr,$$

$$K_{\alpha\beta\gamma}^{B_{\theta}B_r} = -\frac{J}{\text{Pe}} \int_0^1 \int_0^{\pi} r N_{\alpha} \left(\frac{\partial N_{\beta}}{\partial r} + \frac{1}{r} N_{\beta} \right) \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial \theta} \right) d\theta dr,$$

$$K_{\alpha\beta\gamma}^{B_rB_{\theta}} = -\frac{J}{\text{Pe}} \int_0^1 \int_0^{\pi} r N_{\alpha} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial N_{\gamma}}{\partial r} + \frac{1}{r} N_{\gamma} \right) d\theta dr,$$

$$K_{\alpha\beta\gamma}^{B_rB_r} = -\frac{J}{\text{Pe}} \int_0^1 \int_0^{\pi} r N_{\alpha} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} \right) \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial \theta} \right) d\theta dr,$$

$$K_{\alpha} = \frac{Q_v}{\text{Pe}} \int_0^1 \int_0^{\pi} r N_{\alpha} d\theta dr.$$

Дискретный аналог уравнения (7) имеет следующий вид

$$\begin{aligned}
\omega_{\alpha}^{\circ} L_{\alpha}^{\circ} + \sum_{\beta} \omega_{\beta} L_{\alpha\beta}^{\omega} + \sum_{\beta} \vartheta_{\beta} L_{\alpha\beta}^{\vartheta} + \\
+ \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \left[\omega_{\beta} \psi_{\gamma} L_{\alpha\beta\gamma}^{\omega\psi} + B_{r\beta} B_{r\gamma} L_{\alpha\beta\gamma}^{B_rB_r} + \right. \\
\left. + B_{r\beta} B_{\theta\gamma} L_{\alpha\beta\gamma}^{B_{\theta}B_r} + B_{\theta\beta} B_{\theta\gamma} L_{\alpha\beta\gamma}^{B_{\theta}B_{\theta}} \right] = 0,
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\text{где } L_{\alpha}^{\circ} = -\frac{1}{\text{Ho}\Delta\tau} \int_0^1 \int_0^{\pi} r N_{\alpha} d\theta dr,$$

$$\begin{aligned}
L_{\alpha\beta}^{\omega} &= \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\text{Ho}\Delta\tau} \int_0^1 \int_0^{\pi} r N_{\alpha} d\theta dr - \\
&- \frac{1}{\text{Re}} \int_0^1 \int_0^{\pi} \left(N_{\alpha} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial r} - r \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial r} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \theta} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} + \right. \\
&\left. + N_{\alpha} \frac{\text{ctg}\theta}{r} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} - N_{\alpha} \frac{N_{\beta}}{r \sin^2\theta} \right) d\theta dr,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{\alpha\beta\gamma}^{\omega\psi} &= \int_0^1 \int_0^{\pi} \frac{N_{\alpha}}{r \sin\theta} \left(\frac{\partial N_{\gamma}}{\partial \theta} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial r} - \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial r} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} - \right. \\
&\left. - \frac{1}{r} N_{\beta} \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial \theta} + \text{ctg}\theta N_{\beta} \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial r} \right) d\theta dr,
\end{aligned}$$

$$L_{\alpha\beta}^{\vartheta} = \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \int_0^1 \int_0^{\pi} N_{\alpha} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} d\theta dr,$$

$$L_{\alpha\beta\gamma}^{B_rB_r} = -\frac{S}{\text{Re}_m} \int_0^1 \int_0^{\pi} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial r} N_{\beta} \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial \theta} d\theta dr,$$

$$\begin{aligned}
L_{\alpha\beta\gamma}^{B_rB_{\theta}} &= -\frac{S}{\text{Re}_m} \int_0^1 \int_0^{\pi} \left(N_{\alpha} N_{\beta} \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial r} - r \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial r} N_{\beta} \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial r} + \right. \\
&\left. + N_{\alpha} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial r} N_{\gamma} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \theta} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} N_{\gamma} \right) d\theta dr,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{\alpha\beta\gamma}^{B_{\theta}B_{\theta}} &= -\frac{S}{\text{Re}_m} \int_0^1 \int_0^{\pi} \left(\frac{2}{r} N_{\alpha} N_{\beta} \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial \theta} - \right. \\
&\left. - \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial r} N_{\beta} \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial \theta} \right) d\theta dr.
\end{aligned}$$

Дискретный аналог уравнения (8) имеет следующий вид

$$\sum_{\beta} M_{\alpha\beta}^{\psi} \psi_{\beta} + \sum_{\beta} M_{\alpha\beta}^{\omega} \omega_{\beta} = 0, \quad (24)$$

где

$$M_{\alpha\beta}^{\psi} = - \int_0^{r_2} \int_0^{\pi} \left(\left(N_{\alpha} + r \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial r} \right) \frac{\partial N_{\beta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \theta} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} + \frac{\text{ctg} \theta}{r} N_{\alpha} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} \right) d\theta dr,$$

$$M_{\alpha\beta}^{\omega} = \omega_{\beta} \int_0^{r_2} \int_0^{\pi} r^2 N_{\alpha} N_{\beta} \sin \theta d\theta dr.$$

Дискретный аналог уравнения (9) имеет следующий вид

$$B_{r\alpha}^o R_{\alpha}^o + \sum_{\beta} B_{r\beta} R_{\alpha\beta}^{B_r} + \sum_{\beta} B_{\theta\beta} R_{\alpha\beta}^{B_{\theta}} + \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \left[B_{r\beta} \psi_{\gamma} R_{\alpha\beta\gamma}^{B_r\psi} + B_{\theta\beta} \psi_{\gamma} R_{\alpha\beta\gamma}^{B_{\theta}\psi} \right] = 0, \quad (25)$$

где

$$R_{\alpha}^o = - \frac{1}{\text{Ho} \Delta \tau} \int_0^{r_2} \int_0^{\pi} r N_{\alpha} d\theta dr,$$

$$R_{\alpha\beta}^{B_r} = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\text{Ho} \Delta \tau} \int_0^{r_2} \int_0^{\pi} r N_{\alpha} d\theta dr + \frac{1}{\text{Re}_m} \int_0^{r_2} \int_0^{\pi} \left(r \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial r} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial r} - N_{\alpha} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \theta} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} - \frac{\text{ctg} \theta}{r} N_{\alpha} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} N_{\alpha} N_{\beta} \right) d\theta dr,$$

$$R_{\alpha\beta}^{B_{\theta}} = \frac{1}{\text{Re}_m} \int_0^{r_2} \int_0^{\pi} \left(\frac{2 \text{ctg} \theta}{r} N_{\alpha} N_{\beta} + \frac{2}{r} N_{\alpha} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} \right) d\theta dr,$$

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{B_r\psi} = \int_0^{r_2} \int_0^{\pi} \left(\left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \theta} N_{\beta} - \frac{\cos \theta}{r \sin^2 \theta} N_{\alpha} N_{\beta} \right) \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial r} \right) d\theta dr,$$

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{B_{\theta}\psi} = \int_0^{r_2} \int_0^{\pi} \left(\left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \theta} N_{\beta} - \frac{\cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} N_{\alpha} N_{\beta} \right) \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial \theta} \right) d\theta dr.$$

Дискретный аналог уравнения (10) имеет следующий вид

$$B_{\theta\alpha}^o S_{\alpha}^o + \sum_{\beta} B_{\theta\beta} S_{\alpha\beta}^{B_{\theta}} + \sum_{\beta} B_{r\beta} S_{\alpha\beta}^{B_r} + \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \left[B_{\theta\beta} \psi_{\gamma} S_{\alpha\beta\gamma}^{B_{\theta}\psi} + B_{r\beta} \psi_{\gamma} S_{\alpha\beta\gamma}^{B_r\psi} \right] = 0, \quad (26)$$

где

$$S_{\alpha}^o = - \frac{1}{\text{Ho} \Delta \tau} \int_0^{r_2} \int_0^{\pi} r N_{\alpha} d\theta dr,$$

$$S_{\alpha\beta}^{B_{\theta}} = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\text{Ho} \Delta \tau} \int_0^{r_2} \int_0^{\pi} r N_{\alpha} (B_{\theta\alpha} - B_{\theta\alpha}^o) d\theta dr - \frac{1}{\text{Re}_m} \int_0^{r_2} \int_0^{\pi} \left(N_{\alpha} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial r} - r \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial r} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \theta} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} + \frac{\text{ctg} \theta}{r} N_{\alpha} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin^2 \theta} N_{\alpha} N_{\beta} \right) d\theta dr,$$

$$S_{\alpha\beta}^{B_r} = - \frac{1}{\text{Re}_m} \int_0^{r_2} \int_0^{\pi} \left(\frac{2}{r} N_{\alpha} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} \right) d\theta dr,$$

$$S_{\alpha\beta\gamma}^{B_{\theta}\psi} = - \int_0^{r_2} \int_0^{\pi} \frac{N_{\beta}}{r \sin \theta} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial r} \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial \theta} d\theta dr,$$

$$S_{\alpha\beta\gamma}^{B_r\psi} = - \int_0^{r_2} \int_0^{\pi} \frac{N_{\beta}}{\sin \theta} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial r} \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial r} d\theta dr.$$

Для решения системы нелинейных уравнений использовался метод итераций с нижней релаксацией.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 2 приведены расчетные поля для установившегося режима конвективного теплообмена жидкости в ядре Земли при следующих значениях безразмерных чисел подобия

$$\text{Gr} = 10^3; \text{Gr}/\text{Re}^2 = 10; S = 10^{-2}; \text{Re}_m = 2 \cdot 10^{-5}; \text{Ho} = 1; \text{Pe} = 1.$$

Безразмерная толщина слоя была принята равной 1,5 при значении внешнего радиуса ядра $R_0 = 2,5$. В расчетах использовалась равномерная сетка с числом узлов по радиусу 50 и по углу 90. Для температуры рассматривались граничные условия I рода.

На рис. 2, А представлены результаты расчетов для неэлектропроводящей жидкости, полученные

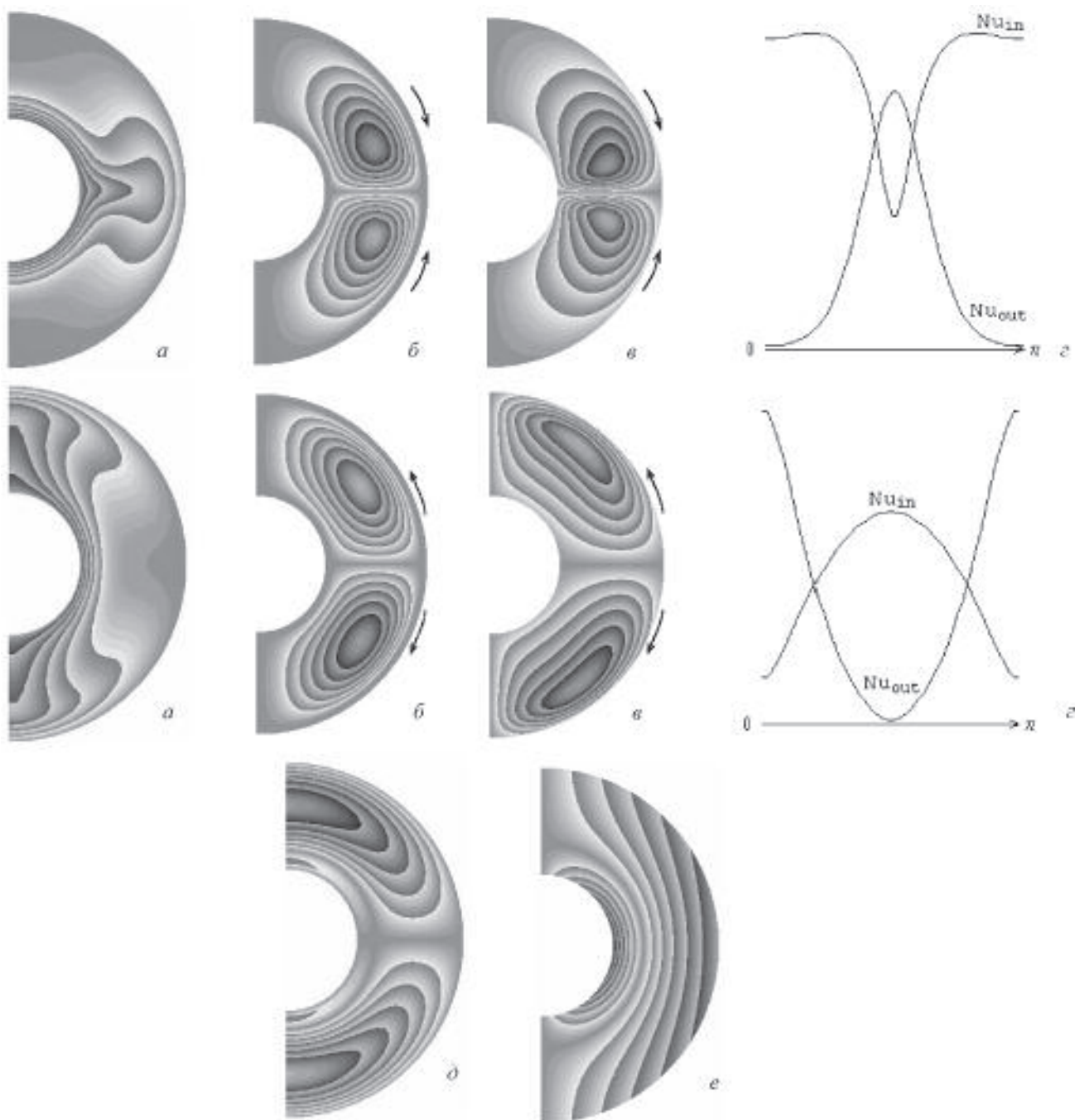


Рис. 2. Расчетные поля: *A* – для неэлектропроводящей жидкости без учета магнитных сил, джоулевой диссипации и внутренних источников тепла; для электропроводящей жидкости: *B* – с учетом магнитных сил. Джоулева диссипация и внутренние источники тепла отсутствуют; *B* – с учетом магнитных сил и джоулевой диссипации. Внутренние источники тепла отсутствуют; *Г* – с учетом магнитных сил, джоулевой диссипации и внутренних источников тепла $Q_V=0,6$; *Д* – с учетом магнитных сил, джоулевой диссипации и внутренних источников тепла $Q_V=6,0$; *Е* – с учетом магнитных сил и внутренних источников тепла $Q_V=0,6$. Джоулева диссипация отсутствует; *Ж* – с учетом магнитных сил и внутренних источников тепла $Q_V=6,0$. Джоулева диссипация отсутствует; *З* – без учета магнитных сил, джоулевой диссипации и внутренних источников тепла.

a – температура, *b* – функция тока, *v* – вихрь, *z* – локальные числа Нуссельта, *d* – радиальная составляющая магнитной индукции, *e* – меридиональная составляющая магнитной индукции.

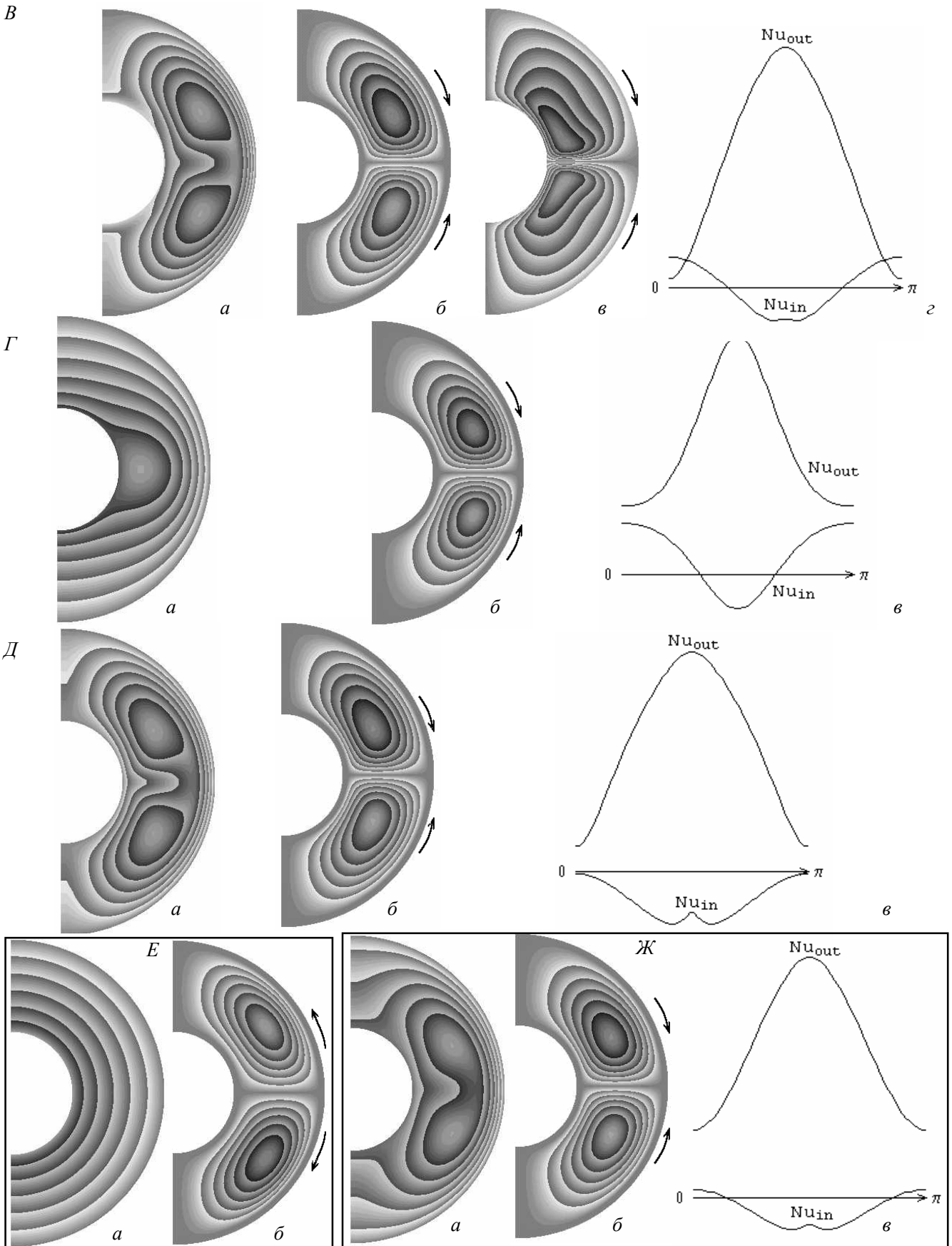


Рис. 2. (Продолжение).

3

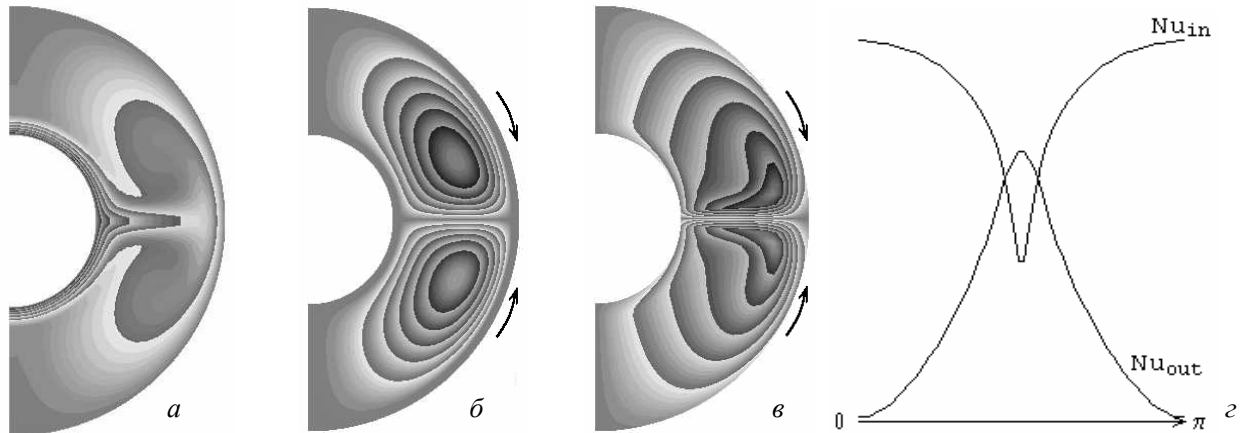


Рис. 2. (Окончание).

при учете конвективных и подъемных сил. Как видно из рисунка, температурные возмущения (рис. 2, *A, a*), в основном, сосредоточены в экваториальной области ($\theta = 90^\circ$), как у внутренней границы ядра, так и у внешней. В слое образуются две конвективные ячейки (рис. 2, *A, б*), вращающиеся в противоположные стороны (верхняя “отрицательная” – по часовой стрелке, нижняя “положительная” – против часовой стрелки). На рис. 2, *A, в* приведено поле вихря (в прослойке имеют место два вихря). Максимальные значения функции тока и вихря достигают следующих величин: $|\Psi_m| = 1,02$; $|\omega_{\max}| = 5,95$. В области экватора значения тепловых потоков имеют экстремум: минимум на внутренней границе ядра и максимум – на внешней. Локальные числа Нуссельта изменяются в пределах: $1,54 \leq Nu_{\text{in}} \leq 3,68$; $0,04 \leq Nu_{\text{out}} \leq 3,00$.

На рис. 2, *B* приведены результаты расчетов для электропроводящей жидкости с учетом инерционных, подъемных и магнитных сил. Учет магнитных сил приводит к изменению поля температуры (рис. 2, *B, a*) по сравнению с результатом рис. 2, *A, a*. Основное изменение температуры (рис. 2, *B, a*) наблюдается в области полюсов, в то время как для неэлектропроводящей жидкости оно имеет место в области экватора (рис. 2, *A, a*). В ядре образуются две конвективные ячейки (рис. 2, *B, б*) большего масштаба, но такой же интенсивности, как и для результата, приведенного на рис. 2, *A, б*. Однако направление движения жидкости в ячейках изменяется на противоположное (рис. 2, *A, б* и рис. 2, *B, б*). Форма вихрей (рис. 2, *B, в*), каждый из которых занимает половину расчетной области, отличается от конфигурации и расположения вихрей в слое (рис. 2, *A, в*). Максимальное значение напряженности вихря для электропроводящей жидкости (рис. 2, *B, в*) возрастает по сравнению

с напряженностью вихря для неэлектропроводящей жидкости (рис. 2, *A, в*), достигая величины $|\omega_{\max}| = 6,44$. Диапазон изменения локальных чисел Нуссельта (рис. 2, *B, з*) для настоящего режима, по сравнению с конвекцией неэлектропроводящей жидкости (рис. 2, *A, з*), увеличивается: $0,84 \leq Nu_{\text{in}} \leq 3,76$; $0,08 \leq Nu_{\text{out}} \leq 5,55$. Характер изменения локальных чисел Нуссельта (рис. 2, *B, з*) изменился на противоположный по сравнению с результатом рис. 2, *A, з*. В слое имеет место регенерация радиальной составляющей магнитной индукции (рис. 2, *B, д*; ее максимальное значение $|\max V_r| \sim 8,54 \cdot 10^{-4}$), которая в северном полушарии принимает отрицательные значения, а в южном – положительные. Меридиональная составляющая магнитной индукции вблизи внутренней границы слоя принимает отрицательные значения, а у внешней границы – положительные (рис. 2, *B, е*).

На рис. 2, *B* представлены расчетные поля, полученные при учете инерционных, подъемных, магнитных сил и джоулевой диссипации тепла. Анализ результатов, приведенных на рис. 2, *B* и рис. 2, *B*, позволяет сделать следующие выводы. Учет джоулевой диссипации тепла приводит к изменению поля температуры, направления движения жидкости в конвективных ячейках, формы вихрей и распределения чисел Нуссельта. В этом случае теплообмен интенсифицируется во всем слое (рис. 2, *B, a*), максимальное значение температуры достигает величины $\vartheta_{\max} = 3,15$. Интенсивности конвекции и напряженности вихря (рис. 2, *B, б* и *в*) также увеличиваются ($|\Psi_m| = 2,25$; $|\omega_{\max}| = 14,50$). Характер изменения локальных чисел Нуссельта (рис. 2, *B, з*) изменяется на противоположный по сравнению с результатом, приведенным на рис. 2, *B, з*. Локальные числа Нуссельта

изменяются в пределах: $-4,11 \leq Nu_{in} \leq 3,86$; $1,18 \leq Nu_{out} \leq 30,02$.

Дополнительный, ко всем предыдущим факторам, учет внутренних источников тепла мощностью $Q_v=0,6$ приводит к результатам, представленным на рис. 2, Г. Сравнивая результаты рис. 2, Г и 2, В, можно отметить, что учет внутренних тепловыделений приводит в основном к изменению поля температуры, не оказывая значительных качественных изменений на поля функции тока, вихря, магнитной индукции и числа Нуссельта. Для результатов рис. 2, Г максимальные значения расчетных величин имеют следующие значения: $\vartheta_{max} = 1,12$; $|\Psi_m| = 1,20$; $|\omega_{max}| = 6,53$. Локальные числа Нуссельта изменяются в интервалах: $-0,72 \leq Nu_{in} \leq 1,07$; $1,43 \leq Nu_{out} \leq 5,00$. Поля вихря и магнитной индукции качественно аналогичны соответствующим полям, приведенным на рис. 2, В, в и рис. 2, Б, д и е. Увеличение мощности внутренних тепловыделений, по сравнению с предыдущим режимом, до $Q_v=6,0$ приводит к изменению поля температуры (рис. 2, Д, а), практически не оказывая влияния на картину течения жидкости и характер изменения чисел Нуссельта (рис. 2, Д, б и 2, Г, б; рис. 2, Д, в и 2, Г, в), но количественно увеличивая интенсивность конвективного теплообмена: $\vartheta_{max} = 4,73$; $|\Psi_m| = 2,31$; $|\omega_{max}| = 18,10$. Локальные числа Нуссельта изменяются в пределах: $-9,55 \leq Nu_{in} \leq -0,32$; $4,65 \leq Nu_{out} \leq 40,18$. Данные результаты при достаточно больших Q_v неплохо согласуются с результатами, приведенными на рис. 2, В (когда учитывалось тепло джоулевой диссипации, но не учитывались внутренние источники тепла). Этот факт говорит о том, что для режимов, в одном из которых учитывается только джоулева диссипация (результаты рис. 2, В), а в другом – джоулева диссипация и внутренние источники тепла (результаты рис. 2, Д), джоулева диссипация оказывает значительное влияние (как качественное, так и количественное) на конвекцию в сферическом слое.

На рис. 2, Е представлены результаты конвективного теплообмена электропроводящей жидкости при учете внутренних источников тепла мощностью $Q_v=0,6$, но без учета джоулевой диссипации. В этом случае теплообмен в прослойке осуществляется теплопроводностью, поле температуры (рис. 2, Е, а) представляет собой концентрические окружности, в области образуются две конвективные ячейки (рис. 2, Е, б), интенсивность которых незначительна. Значения локальных и осредненных чисел Нуссельта совпадают. $Nu_{in} = 0,94$; $Nu_{out} = 1,56$; $\vartheta_{max} = 1$;

$|\Psi_m| = 6,89 \cdot 10^{-3}$; $|\omega_{max}| = 3,72 \cdot 10^{-2}$. Сравнивая эти результаты с результатами рис. 2, Г (где учитывались такие же внутренние источники тепла и джоулева диссипация), можно отметить, что учет джоулевой диссипации приводит к существенному изменению теплообмена (рис. 2, Г, а и 2, Е, а) и к изменению направления движения жидкости в ячейках (рис. 2, Г, б и 2, Е, б).

На рис. 2, Ж приведены результаты конвективного теплообмена электропроводящей жидкости при учете внутренних источников тепла мощностью $Q_v=6,0$, но без учета джоулевой диссипации. Сравнивая эти результаты с результатами рис. 2, Д (где учитывались такие же внутренние источники тепла и джоулева диссипация), можно отметить, что учет джоулевой диссипации при достаточно больших Q_v практически не влияет на поле температуры (рис. 2, Д, а и 2, Ж, а), картину течения жидкости (рис. 2, Д, б и 2, Ж, б) и характер изменения чисел Нуссельта (рис. 2, Д, в и 2, Ж, в), однако интенсифицирует конвекцию. Из этого анализа следует, что для режимов, в одном из которых учитываются только внутренние источники тепла (результаты рис. 2, Ж), а в другом – джоулева диссипация и внутренние источники тепла (результаты рис. 2, Д), джоулева диссипация слабо влияет на качественную картину конвекции в сферическом слое, интенсифицируя ее количественно. Для результатов рис. 2, Е $\vartheta_{max} = 1,83$; $|\Psi_m| = 1,59$; $|\omega_{max}| = 8,47$. Локальные числа Нуссельта изменяются в пределах: $-1,91 \leq Nu_{in} \leq 0,47$; $4,09 \leq Nu_{out} \leq 14,44$.

На рис. 2, З представлены результаты, аналогичные результатам рис. 2, А (без учета магнитных сил, внутренних источников тепла и джоулевой диссипации), за одним исключением: для результатов рис. 2, З отношение $Gr/Re^2=100$. Увеличение отношения Gr/Re^2 на порядок приводит к интенсификации конвекции. По сравнению с результатами рис. 2, А максимальные величины функции тока, напряженности вихря и локальных чисел Нуссельта возрастают, принимая следующие значения: $|\Psi_m| = 4,56$; $|\omega_{max}| = 28,20$; $2,67 \leq Nu_{in} \leq 6,36$; $0,07 \leq Nu_{out} \leq 4,50$. Некоторые изменения претерпевает поле температуры (рис. 2, З, а и 2, А, а).

На рис. 3 приведены результаты расчетов полей температуры, функции тока, вихря и локальных чисел Нуссельта в случае подвода тепла на внутренней границе ядра, т.е. для граничных условий вида (13).

Сравнивая эти результаты с результатами, приведенными на рис. 2, Б и 2, В, можно отметить, что

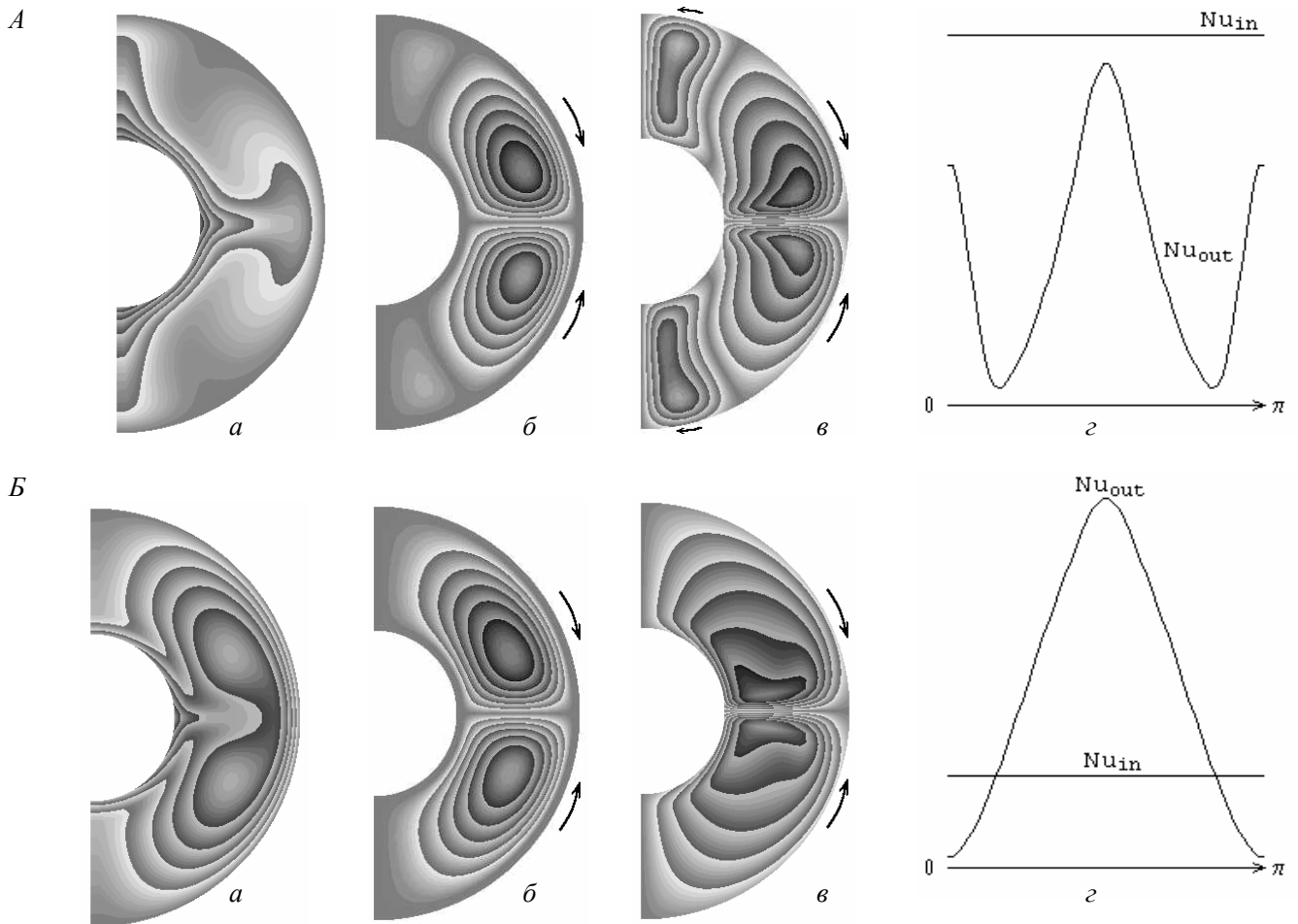


Рис. 3. Расчетные поля: *A* – с учетом магнитных сил. Джоулева диссипация и внутренние источники тепла отсутствуют; *B* – с учетом магнитных сил и джоулевой диссипации. Внутренние источники тепла отсутствуют.

a – температура, *б* – функция тока, *в* – вихрь, *z* – локальные числа Нуссельта.

для режима, в котором учитываются магнитные силы, но не учитываются внутренние источники тепла и джоулева диссипация (рис. 3, *A* и 2, *B*), поля температуры, вихря и характер изменения локальных чисел Нуссельта значительно различаются. Поле температуры претерпевает значительные изменения в областях полюсов и экватора (рис. 3, *A*, *a*). На внутренней границе число Нуссельта Nu_{in} не изменяется ($Nu_{in} = 10$), а на внешней границе значение числа Нуссельта изменяется в интервале $0,49 \leq Nu_{out} \leq 9,22$. Максимальное значение функции тока достигает величины $|\Psi_m| = 1,82$ по сравнению с $|\Psi_m| = 1,02$ для рис. 2, *B*, *б*. Максимальное значение вихря возрастает до величины $|\omega_{max}| = 11,10$ (рис. 3, *A*, *в*) по сравнению с $|\omega_{max}| = 6,44$ (рис. 2, *B*, *в*). Структура течения в

ядре в случае подвода тепла изменяется, особенно это заметно на поле вихря (рис. 2, *B*, *в* и рис. 3, *A*, *в*). В области полюсов образуются два мелкомасштабных вихря (рис. 3, *A*, *в*). Направление движения в жидкости в конвективных ячейках изменяется на противоположное. Зависимость Nu_{out} имеет два минимума ($\theta \sim 40^\circ$) и один максимум в экваториальной плоскости ($\theta \sim 90^\circ$).

Сравнение результатов, приведенных на рис. 3, *B* и рис. 2, *B*, позволяет сделать следующие выводы. Поля температуры, функции тока, вихря и распределение локального числа качественно не изменились. Структура течения и направление движения жидкости в двух конвективных ячейках сохранились. Максимальные значения расчетных величин для резуль-

татов рис. 3, *B* следующие: $\vartheta_{\max} = 4,33$ против 3,15; $|\Psi_m| = 3,21$ против 2,25; $|\omega_{\max}| = 17,90$ против 14,50; ($Nu_{in} = 10$ сохраняет постоянное значение на внутренней границе) $1,23 \leq Nu_{out} \leq 40,30$. Таким образом, подвод тепла изнутри, по сравнению с заданием температуры на внутренней границе ядра, интенсифицирует конвекцию и теплообмен в ядре.

ЛИТЕРАТУРА

1. Госмен А.Д., Пан В.М., Ранчел А.К. и др. Численные методы исследования течений вязкой жидкости. М., 1972.
2. Соловьев С.В. иагнитная гидродинамика ядра Земли. Часиные случаи // Тихоокеан. геология. 1999. Т. 18, № 3. С. 3–11.
3. Соловьев С.В., Кузнецов С.В. // Инженерно-физический журнал. 1998. Т. 71, № 5. С. 850–854.

Поступила в редакцию 26 января 2004 г.

Рекомендована к печати Ю.Ф. Малышевым

S.V. Solovyov

Thermal convection in the core of the Earth with consideration for Joule dissipation

The thermal convection of electric conductive liquid in the core of the Earth with consideration for the internal and Joule sources of heat is investigated. The estimation of the influence of internal and Joule sources of heat on the convection structure of flow and on the field of temperature is made. The mathematical model of natural convective heat transfer of noncompressible electric conductive liquid in variables of the vortex-stream function in a nondimensional form with respect for the symmetry by longitude (Boussinesq approximation is used) is described by the system of differential equations of magnetic induction, Navier-Stokes, continuity and energy conservation with account of magnetic and buoyancy forces, and internal and Joule sources.