ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
ГЕОЛОГИЯ И РАЗВЕДКА
2006, № 5

ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОИСКОВ И РАЗВЕДКИ

УДК 550.832; 550.83.017

А.Д. КАРИНСКИЙ, Д.С. ДАЕВ

РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО МИКРОКАРОТАЖА ДЛЯ ОДНОЙ ИЗ МОДЕЛЕЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Получено решение прямой задачи для модели среды с двумя плоскопараллельными границами. Разделяемые этими границами области могут отвечать «башмаку» зонда диэлектрического микрокаротажа (ДМК), глинистой корке на стенке скважины и анизотропным горным породам. На основе полученного решения можно провести математическое моделирование для оценки влияния электрических параметров анизотропных горных пород и глинистой корки на результаты ДМК, а также для обоснования методики количественной интерпретации результатов измерений в ДМК при анизотропии горных пород.

Различные методы микрокаротажа применяются для определения физических параметров горных пород, расположенных вблизи скважины, и на этой основе литологических характеристик и коллекторских свойств пород. Для обоснования методики измерений и интерпретации их результатов в теории каротажа требуется выбор моделей среды — по возможности простых, но удовлетворительно аппроксимирующих реальную среду и условия измерений. Поскольку размеры зондов микрокаротажа обычно невелики по сравнению с диаметром скважины, в теории микрокаротажа в качестве основной рассматривается модель среды с плоскопараллельными поверхностями раздела. Это означает, что при выборе модели пренебрегают конечными радиусами кривизны скважины, промытой зоны, а также глинистой корки в пластах-коллекторах (при бурении скважин на глинистом растворе).

ДМК применяется для определения диэлектрической проницаемости ε и удельной электропроводности σ (либо удельного электрического сопротивления $\rho = 1/\sigma$) пройденных скважиной горных пород. Если в качестве промывочной жидкости при бурении скважин используется глинистый раствор (или вода), то для проницаемых пластов-коллекторов результаты ДМК зависят в основном от ε и ρ промытой зоны. В ДМК измеряются характеристики электромагнитного поля при частотах от нескольких сотен мегагерц до нескольких гигагерц. Возбудителями и измерителями электромагнитного поля являются щелевые антенны. При достаточно малой длине, по сравнению с расстояниями между ними, такие антенны могут быть аппроксимированы магнитными диполями, моменты $\vec{l}$ которых лежат на поверхности идеального проводника — «башмака» зонда ДМК, и ориентированы по направлению антенн. В более общем случае щелевые антенны можно рассматривать как линии из магнитных диполей. Напряжение в измерительной щелевой антенне зависит от составляющей магнитного поля вдоль такой антенны.

Ранее нами проведены исследования с целью выбора оптимальных характеристик зондов ДМК и способов интерпретации результатов измерений с такими зондами [5]. В частности, получены решения прямых задач ДМК для двух 1-D изотропных моделей среды.

1. Идеальный проводник, соответствующий «башмаку» зонда ДМК, имеет форму цилиндра с радиусом, равным радиусу скважины.

2. Идеальный проводник, башмак, отделен от остальной части среды (глинистой корки, промытой зоны, горных пород) плоскостью, т. е. заполняет полупространство. В этом случае, естественно, не учитывается влияние конечного радиуса кривизны скважины и «башмака» зонда на результаты измерений.

Показано, что для получения удовлетворительной по точности количественной интерпретации результатов измерений с различными зондами ДМК, как правило, требуется учитывать конечный радиус кривизны скважины. Вместе с тем установлено, что для зондов ДМК модели среды с плоскопараллельными границами позволяют на качественном уровне правильно оценить особенности влияния различных параметров среды на результаты ДМК. Исследования с целью выяснения влияния параметров анизотропных горных пород на «показания» зондов ДМК ранее не проводились.

Наиболее часто в теории электрических и электромагнитных геофизических методов применяется одноосная анизотропная среда (соответствующая микрослоистым, рассланцованным или трещиноватым горным породам). Удельную электропроводность σ и диэлектрическую проницаемость такой среды характеризуют две пары значений: σ_n, ε_n — по направлению оси анизотропии n (ортогональной направлению трещин или границ прослоев) и σ_t, ε_t — по любому нормальному оси n направлению t. Поперечное и продольное удельные электрические сопротивления такой среды характеризуют параметры $\rho_n = 1/\sigma_n$ и $\rho_t = 1/\sigma_t$. Влияние немагнитной одноосной анизотропной среды на гармонически меняющееся высокочастотное электромагнитное поле зависит от волновых чисел $k_n = \sqrt{i\omega\mu_0(\sigma_n - i\omega\varepsilon_0\varepsilon_n)}$ и $k_t = \sqrt{i\omega\mu_0(\sigma_t - i\omega\varepsilon_0\varepsilon_t)}$, где i — мнимая единица; $\omega = 2\pi f$ — круговая частота; f — частота колебаний; $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$, Гн/м, — магнитная постоянная; $\varepsilon_0 = 1/(c^2\cdot\mu_0)$, Ф/м, — электрическая постоянная; $c \approx 3\cdot 10^8$, м/с, — электродинамическая постоянная, равная скорости света в вакууме. Коэффициент анизотропии $\lambda = k_t/k_n$ в общем случае — комплексная величина. В изотропной среде $\lambda = 1$.

Следует отметить, что экспериментальные исследования с целью определения диэлектрических проницаемостей и удельных электропроводностей анизотропных горных пород с применяемыми в ДМК частотами не проводились. Возможно, что для задания электрических параметров анизотропной среды при математическом моделировании высокочастотного электромагнитного поля в анизотропных средах можно воспользоваться выражениями для σ_n, ε_n и σ_t, ε_t макроанизотропных сред [3].

При получении решений прямых задач электродинамики для некоторых возбудителей электромагнитного поля, в частности, магнитного диполя, удобно использовать электродинамические потенциалы магнитного типа. В однородной анизотропной среде вне сторонних возбудителей поля при применении калибровки В.Н. Тихонова [7] векторный электродинамический потенциал $\vec{A}$ магнитного типа в декартовой системе координат связан с напряженностями электрического ($\vec{E}$) и магнитного ($\vec{H}$) полей равенствами:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{\varepsilon_t^*}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right), E_y = \frac{1}{\varepsilon_t^*}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right), \\ E_z &= \frac{\lambda^2}{\varepsilon_t^*}\left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right), \end{aligned}\right. \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} H_x &= \frac{1}{i\omega\mu_0\varepsilon_t^*}\left[\lambda^2\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial y}\right) + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial z}\right] - i\omega A_x, \\ H_y &= \frac{1}{i\omega\mu_0\varepsilon_t^*}\left[\lambda^2\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial z}\right] - i\omega A_y, \\ H_z &= \frac{1}{i\omega\mu_0\varepsilon_t^*}\left[\lambda^2\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y\partial z}\right) + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right] - i\omega A_z \end{aligned}\right\}, \qquad (2)$$

где $\varepsilon_n^* = \varepsilon_0\varepsilon_n + i\sigma_n/\omega$, $\varepsilon_t^* = \varepsilon_0\varepsilon_t + i\sigma_t/\omega$ — комплексные абсолютные диэлектрические проницаемости по направлениям n и t. Декартовы компоненты потенциала $\vec{A}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{\nabla}^2 A_x + k_n^2 A_x = 0,\ \tilde{\nabla}^2 A_y + k_n^2 A_y = 0, \\ &\nabla^2 A_z + k_t^2 A_z = (1-\lambda^2)\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y\partial z}\right), \\ &\text{ãäå}\ \tilde{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^z} + \frac{\partial^2}{\partial y^z} + \frac{1}{\lambda^z}\frac{\partial^2}{\partial z^z} \end{aligned}\right\}. \qquad (3)$$

В [8, 9] приведены сведения о применяемых в практике зондах ДМК. Генераторные (Г) и измерительные (И) щелевые антенны у этих зондов могут быть аппроксимированы взаимно параллельными линиями $l_Г$, $l_И$, ориентированными по нормали к «оси» зонда (рис. 1). Если, например, щелевые антенны параллельны оси X, то напряжение в измерительной антенне пропорционально двойному интегралу

$$E = \int_{l_{\grave{E}}}\int_{l_{\tilde{A}}} H_x\, dl_{\tilde{A}}\, dl_{\grave{E}}, \qquad (4)$$

где H_x — x-компонента магнитного поля $\vec{H}$ магнитного диполя с моментом по линии $l_И$. При достаточно малых по сравнению с L длинах $l_Г$ и $l_И$ зонд ДМК можно рассматривать как дипольно-экваториальный (зонд из генераторного и измерительного магнитных диполей с взаимно-параллельными моментами, ортогональными «оси» L зонда).

Поле магнитного диполя в однородной анизотропной среде

Пусть центр магнитного диполя находится в начале декартовых координат x, y, z; ось Z направлена по оси анизотропии n, а момент $\vec{M}$ диполя лежит в плоскости $y = 0$. Тогда $\vec{M} = \vec{l}_x M_x + \vec{l}_z M_z$, где M_z и M_x — компоненты $\vec{M}$ по оси анизотропии n и нормальная к n соответственно. При решении прямой задачи электродинамики для однородной анизотропной модели среды получаем следующие, удовлетворяющие уравнениям (3), формулы для компонент потенциала $\vec{A} = \vec{l}_x A_x + \vec{l}_z A_z$, связанного с электромагнитным полем равенствами (1), (2):

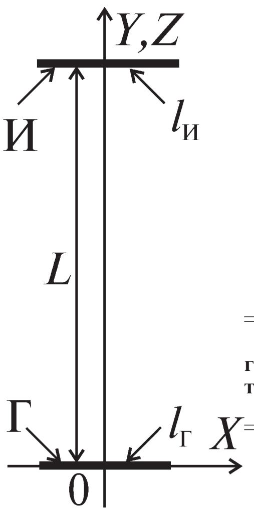

Рис. 1. Взаимное расположение генераторной и измерительной антенн в зонде ДМК: L — расстояние между ними

$$\left.\begin{aligned} A_x &= i\omega\mu_0\varepsilon_n^* \frac{\lambda M_x}{4\pi} \exp(ik_n S)/S, \\ A_z &= M_z \frac{i\omega\mu_0\varepsilon_t^*}{4\pi} \frac{\exp(ik_t R)}{R} + \\ &+ M_x \frac{i\omega\mu_0\varepsilon_n^*\lambda}{4\pi} \frac{x\cdot z}{x^2+y^2} \lambda\left(\lambda \frac{\exp(ik_n S)}{S} - \frac{\exp(ik_t R)}{R}\right) \end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

где $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $S = \sqrt{x^2+y^2+\lambda^2 z^2}$. На основе (1), (2), (5) можем получить выражения для компонент полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ магнитного диполя в однородной анизотропной среде. Следовательно, при ориентации момента $\vec{M}$ по оси анизотропии n ($M_x = 0$, $\vec{M} = \vec{l}_z M_z$) на электромагнитное поле влияет k_t, но не влияют k_n и коэффициент анизотропии λ. В этом случае поле может испытывать только влияние таких электрических параметров анизотропной среды, как ρ_t и ε_t. Это связано с тем, что при $\vec{M} = \vec{l}_z M_z$ векторы $\vec{E}$ лежат в плоскостях, нормальных к оси анизотропии n и, в соответствии с [6], не происходит поляризации среды, обусловленной ее анизотропией. При $M_x \neq 0$ компоненты электромагнитного поля зависят как от k_t, так и от k_n и λ. Приведем выражения для магнитного поля $\vec{H}$ при $\vec{M} = \vec{l}_x M_x$ в двух частных случаях.

1. $\vec{M} = \vec{l}_x M_x, x = z = 0, R = S = |y| = L, \vec{H} = \vec{l}_x H_x$,

$$H_x = \frac{-M_x}{4\pi L^3}[\exp(ik_t L) - ik_t L(1 - ik_n L)\exp(ik_n L)]. \tag{6}$$

Определяемой компоненте H_x в (6) пропорционально напряжение, измеряемое при помощи дипольно-экваториального зонда, ориентированного по нормали к оси анизотропии. Иначе говоря, в данном случае моменты генераторного и измерительного диполей, а также отрезок прямой, соединяющий центры диполей, ортогональны оси анизотропии n.

2. $\vec{M} = \vec{l}_x M_x, x = y = 0, R = |z| = L$,

$S = \lambda L, \vec{H} = \vec{l}_x H_x$,

$$H_x = \frac{-M_x}{4\pi L^3}\exp(ik_t L)\left[(1 - ik_t L - k_t^2 L^2) + \frac{1}{2}(k_t^2 - k_n^2)L^2\right]. \tag{7}$$

Компоненте H_x, в (7) пропорционально напряжение, измеряемое при помощи дипольно-экваториального зонда, ориентированного по оси анизотропии n. Иными словами, в этой ситуации моменты генераторного и измерительного диполей ортогональны оси n, а отрезок прямой, соединяющий центры диполей, лежит на оси n.

Поле в одной из моделей неоднородной анизотропной среды

Получим решение прямой задачи электродинамики для случая, когда сторонним возбудителем электромагнитного поля является магнитный диполь, а одна из частей модели среды анизотропна. На рис. 2 показана модель среды, состоящая из трех однородных областей V_0, V_1, V_2, разделенных двумя плоскопараллельными границами S_1, S_2. Область V_0 — идеальный проводник. Ее удельная электропроводность $\sigma_0 \to \infty$. Изотропную область V_1 характеризуют удельная электропроводность σ_1, диэлектрическая проницаемость ε_1 и волновое число k_1. Электрические параметры анизотропной области V_2 — $\sigma_{2n}, \varepsilon_{2n}, \sigma_{2t}, \varepsilon_{2t}$, а соответствующие волновые числа — k_{2n}, k_{2t}. Ось анизотропии n ориентирована по нормали к границам S_1, S_2. Магнитный диполь расположен в области V_1 на расстояниях h и H от границ S_1 и S_2 соответственно. Момент $\vec{M}$ диполя ортогонален оси анизотропии n.

При $h = 0$ и расположении точек наблюдения на границе S_1 рассматриваемая прямая задача может приближенно соответствовать ситуации, когда возбудителем высокочастотного электромагнитного поля в скважине является короткая щелевая генераторная антенна зонда ДМК, а его размеры достаточно малы — можно пренебречь конечным радиусом кривизны скважины. При этом область V_0 отвечает «башмаку» зонда, область V_1 — глинистой корке. Область V_2 может соответствовать анизотропным горным породам, либо анизотропной промытой зоне пласта-коллектора для одного из возможных частных случаев: 1) ось анизотропии пород ортогональна оси скважины; 2) положение зонда ДМК в скважине таково, что его ось ортогональна оси анизотропии пород.

Введем декартову (x, y, z) и цилиндрическую (r, φ, z) системы координат с общими осью Z и началом 0 в центре диполя, осью X по направлению $\vec{M}$. Тогда $\vec{M} = \vec{l}_x M_x$. Определим векторный потенциал $\vec{A}$, связанный с электромагнитным полем равенствами (1), (2).

В [1, 2] приведено решение прямой задачи для поля переменного электрического диполя в анизотропной среде с плоскопараллельными границами. По аналогии с [1] получим решение рассматриваемой задачи для поля магнитного диполя в предположении, что для декартовых компонент векторного потенциала магнитного типа $\vec{A}$ имеем: $\vec{A} = \vec{l}_x A_x + \vec{l}_z A_z$. Допустим, что в цилиндрических координатах декартовы компоненты $\vec{A}$ не зависят от φ, т. е. $A_x = A_x(r, z)$, $A_z = A_z(r, z)$. Тогда, согласно (5), можем представить уравнения для компонент A_x и A_z в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 A_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_x}{\partial r} + \frac{1}{\lambda^2}\frac{A_x}{\partial z^2} + k_n^2 A_x = 0, \\ &\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k_t^2 A_z = (1-\lambda^2)\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z}. \end{aligned} \tag{8}$$

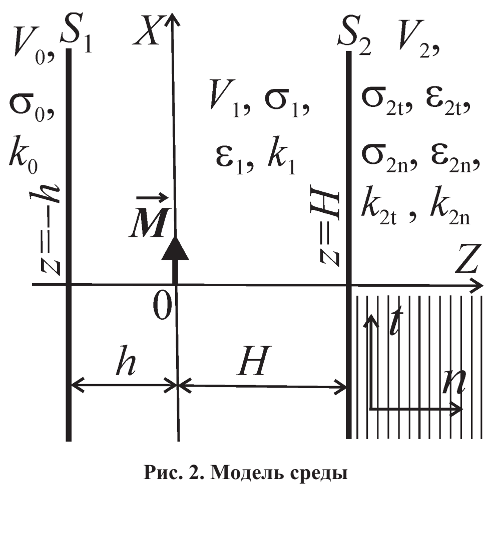

Рис. 2. Модель среды

Введем в рассмотрение скалярное поле W, связанное с компонентой A_z равенством $A_z = A_z = \partial W/\partial x$. Тогда из второго уравнения в (8) получим:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}+k_t^2 W=(1-\lambda^2)\frac{\partial A_x}{\partial z}. \qquad (9)$$

Для нахождения частных решений a_x, w уравнений (8), (9) для A_x, W воспользуемся методом разделения переменных. Предположим, что эти решения могут быть найдены в виде: $a_x = X(z,k)\cdot\psi(r)$, $w = Z(z,k)\cdot\psi(r)$. Тогда в соответствии с (8), (9) имеем:

$$\frac{\psi''}{\psi}+\frac{\psi'}{r\psi}=-\frac{X''}{\lambda^2 X}-\frac{k_t^2}{\lambda^2}=-m^2,$$

$$\frac{\psi''}{\psi}+\frac{\psi'}{r\psi}=-\frac{Z''}{Z}-k_t^2+(1-\lambda^2)\frac{X'}{Z}=-m^2, \text{ или}$$

$$\psi''+\frac{\psi'}{r}+m^2\psi=0,$$

$$X''=m_\lambda^2 X,\; Z''-m_t^2 Z=(1-\lambda^2)X', \qquad (10)$$

где $\psi'=d\psi/dr$, $\psi''=d^2\psi/dr^2$, $X'=dX/dz$, $Z''=d^2Z/dz^2$, $X''=d^2X/dz^2$, $m_t=\sqrt{m^2-k_t^2}$, $m_\lambda=\sqrt{(\lambda m)^2-k_t^2}$, $\mathrm{Re}(m_t)\ge 0$, $\mathrm{Re}(m_\lambda)\ge 0$, $-m^2$ — постоянная разделения.

Решения первого уравнения в (10) для ψ — функции Бесселя первого и второго родов нулевого порядка: $J_0(mr)$, $Y_0(mr)$. Примем во внимание, что при $r\to 0\,|Y_0(mr)|\to\infty$, а ось $Z(r=0)$ не является особой линией поля A. Поэтому решением уравнения для ψ в рассматриваемом случае может быть лишь функция $J_0(mr)$. Общее решение уравнения (10) для функ- ции X имеет вид: $X = D_1\exp(-m_\lambda z)+D_2\exp(m_\lambda z)$, где D_1, D_2 — множители, не зависящие от z.

Решение третьего (неоднородного) уравнения в (10) для функции Z это — сумма общего решения $Z_о$ однородного уравнения и любого частного решения $Z_ч$ неоднородного уравнения: $Z = Z_0 + Z_ч$, $Z_0''-m_t^2 Z_0=0$. Общее решение последнего уравнения: $Z_0 = C_1\exp(-m_t z) + C_2\exp(m_t z)$, где C_1, C_2 — не зависящие от аргумента z константы. Принимая во внимание, что

$$Z''-m_t^2 Z=\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{-1}{m^2}X'\right)-m_t^2\frac{-1}{m^2}X'=$$
$$=(m_t^2-m_\lambda^2)\frac{X'}{m^2}=(1-\lambda^2)X',$$

$$X'=m_\lambda[-D_1\exp(-m_\lambda z)+D_2\exp(m_\lambda z)],$$

не сложно убедиться в том, что частным решением неоднородного уравнения (10) для функции $Z_ч$ является выражение: $Z_ч=-X'/m^2$. Таким образом, решение третьего уравнения в (10) следующее:

$$Z=[C_1\exp(-m_t z)+C_2\exp(m_t z)]+ \\ +\frac{m_\lambda}{m^2}[B_1\exp(-m_\lambda z)-B_2\exp(m_\lambda z)]. \qquad (11)$$

Следовательно, частные решения уравнений (8), (9) для a_x и w можно представить в виде:

$$a_x=[B_1\exp(-m_\lambda z)+B_2\exp(m_\lambda z)]J_0(mr),$$

$$w=\left\{\frac{m_\lambda}{m^2}B_1\exp(-m_\lambda z)-B_2\exp(m_\lambda z)]+\right.$$
$$\left.+\;C_1\exp(-m_t z)+C_2\exp(m_t z)\right\}J_0(mr).$$

Соответственно общие решения уравнений (8), (9) для A_x и W:

$$\left.\begin{aligned}
A_x&=\int_0^\infty[B_1\exp(-m_\lambda z)+B_2\exp(m_\lambda z)]J_0(mr)dm,\\
W&=\int_0^\infty\left\{\frac{m_\lambda}{m^2}[B_1\exp(-m_\lambda z)-B_2\exp(m_\lambda z)]+\right.\\
&\left.+\;C_1\exp(-m_t z)+C_2\exp(m_t z)\right\}J_0(mr)dm
\end{aligned}\right\}.(12)$$

Принимая во внимание, что $A_z=\dfrac{\partial W}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial x}J_0(mr)=$ $=\dfrac{\partial}{\partial x}J_0(mr)=\dfrac{\partial r}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial r}J_0(mr)=-\dfrac{x}{r}mJ_1(mr)$, где $J_1(mr)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка аргумента mr, получаем:

$$\begin{aligned}
A_z&=\frac{x}{r}\int_0^\infty\left\{\frac{m_\lambda}{m^2}[B_1\exp(-m_\lambda z)-B_2\exp(m_\lambda z)]+\right.\\
&\left.+\;mC_1\exp(-m_t z)+C_2\exp(m_t z)\right\}J_1(mr)=\\
&=\frac{x}{r}\int_0^\infty\left\{\frac{m_\lambda}{m^2}[B_1\exp(-m_\lambda z)-B_2\exp(m_\lambda z)]+\right.\\
&\left.+\;C_1'\exp(-m_t z)+C_2'\exp(m_t z)\right\}J_1(mr).
\end{aligned} \qquad (13)$$

Из сопоставления (12), (13) ясно, как связаны между собой выражения для компонент A_x и A_z векторного потенциала магнитного типа в анизотропной среде при $\vec{M}=\vec{M}_x$.

Воспользуемся интегралом Зоммерфельда:

$$\frac{\exp(ikR)}{R}=\int_0^\infty\frac{m}{m_k}\exp(\sqrt{m^2-k^2}|z|)J_0(mr)dm, \qquad (14)$$

где $R=\sqrt{r^2+z^2}$, $m_k=\sqrt{m^2-k^2}$, $\mathrm{Re}(m_k)\ge 0$.

Тогда в однородной анизотропной среде в соответствии с (5), (14) для расположенного в начале координат магнитного диполя с моментом $\vec{M}=\vec{M}_x$ для ненулевых декартовых компонент потенциала $\vec{A}$:

$$\left.\begin{aligned}
&A_x^0 = i\omega\mu_0\varepsilon_t^* \frac{M_x}{4\pi}\int_0^\infty \frac{m}{m_\lambda}\exp(-m_\lambda|z|)J_0(mr)dm,\\
&A_z^0 = i\omega\mu_0\varepsilon_t^* \frac{M_x}{4\pi}\frac{x}{r}\frac{z}{|z|}\int_0^\infty [\exp(-m_t|z|)-\\
&-\exp(-m_\lambda|z|)]J_1(mr)dm
\end{aligned}\right\}. \qquad (15)$$

Вернемся к поставленной выше прямой задаче для модели среды и стороннего возбудителя поля (рис. 2). Предположим, что ее решение для векторного потенциала $\vec{A}$ может быть найдено в виде: $\vec{A} = \vec{l}_x A_x + \vec{l}_z A_z$. Тогда в соответствии с (8), для единственности решения оно должно удовлетворять условиям следующей краевой задачи.

$$\left.\begin{aligned}
&1.\text{Ïðè } -h<z<H: \frac{\partial^2 A_x^{(1)}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 A_x^{(1)}}{\partial r}+\frac{\partial^2 A_x^{(1)}}{\partial z^2}+k_1^2 A_x^{(1)}=0,\\
&\frac{\partial^2 A_z^{(1)}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 A_z^{(1)}}{\partial r}+\frac{\partial^2 A_z^{(1)}}{\partial z^2}+k_1^2 A_z^{(1)}=0,\\
&2.\text{Ïðè } z>H: \frac{\partial^2 A_x^{(2)}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 A_x^{(2)}}{\partial r}+\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 A_x^{(2)}}{\partial z^2}+k_{2n}^2 A_x^{(2)}=0,\\
&\frac{\partial^2 A_z^{(2)}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial A_z^{(2)}}{\partial r}+\frac{\partial^2 A_z^{(2)}}{\partial z^2}+k_{2t}^2 A_z^{(2)}=(1-\lambda^2)\frac{\partial^2 A_x^{(2)}}{\partial x\partial z}.\\
&3.\text{Ïðè } R\to\infty: A_x^{(1,2)}\to 0,\quad A_z^{(1,2)}\to 0.\\
&4.\text{Ïðè } R\to 0: \vec{A}^{(1)}\to\infty \text{ êàê } \vec{A}^{\text{Ï}}.\\
&5.\text{Ïðè } z=-h: E_x^{(1)}=0, E_y^{(1)}=0.\\
&6.\text{Ïðè } z=H: \begin{cases} a)\, E_x^{(1)}=E_x^{(2)},\ \text{á})\, E_y^{(1)}=E_y^{(2)},\\ \text{â})\, H_x^{(1)}=H_x^{(2)},\ \text{ã})\, E_y^{(1)}=H_y^{(2)}.\end{cases}
\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

В (16) верхние индексы векторов (в скобках) или их компонент соответствуют индексам областей пространства V на рис. 2, а $\lambda = k_{2t}/k_{2n}$. Пятое условие (при $z = -h$) выражает равенство нулю тангенциальных к границе с идеальным проводником компонент поля $\vec{E}$ у этой границы. В четвертом условии (при $R \to 0$) $\vec{A}^{\text{Ï}}$ — векторный потенциал «первичного» поля (поля в однородной изотропной среде с волновым числом k_1.) Согласно (15),

$$\vec{A}^{\text{Ï}} = \vec{l}_x A_x^{\text{Ï}},$$
$$A_x^{\text{Ï}} = i\omega\mu_0\varepsilon_1^* \frac{M_x}{4\pi}\int_0^\infty \frac{m}{m_1}\exp(-m_1|z|)J_0(mr)dm.$$

Условия сопряжения (при $z = H$) на границе S_2 отражают непрерывность на такой границе тангенциальных к ней компонент векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$. В соответствии с (1), (2), при $\vec{A} = \vec{l}_x A_x + \vec{l}_z A_z$ эти компоненты связаны с потенциалом $\vec{A}$ равенствами:

$$E_x = \frac{1}{\varepsilon_t^*}\frac{\partial A_z}{\partial y},\ E_y = \frac{1}{\varepsilon_t^*}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$
$$H_x = \frac{1}{i\omega\mu_0\varepsilon_t^*}\left(k_t^2 A_x + \lambda^2\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial z}\right),$$
$$H_y = \frac{1}{i\omega\mu_0\varepsilon_t^*}\left(\lambda^2\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial z}\right).$$

Из последних выражений следует, что для непрерывности компонент E_x, E_y, H_x, H_y на плоскости $z = H$ достаточно, чтобы на этой плоскости были непрерывны следующие функции: A_x, $\frac{1}{\varepsilon_t^*}\frac{\partial A_x}{\partial z}$, $\frac{1}{\varepsilon_t^*}A_z$, $\frac{1}{\varepsilon_t^*}\left(\lambda^2\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$.

В соответствии с (13), (15) можем найти решение для компонент векторного потенциала:

$$\left.\begin{aligned}
&A_x^{(1)} = i\omega\mu_0\varepsilon_1^*\frac{M_x}{4\pi}\int_0^\infty \frac{m}{m_1}[\exp(-m_1|z|)+B\exp(-m_1 z)+\\
&+B_1\exp(-m_1 z)]J_0(mr)dm,\\
&A_z^{(1)} = i\omega\mu_0\varepsilon_1^*\frac{M_x}{4\pi}\frac{x}{r}\int_0^\infty [C\exp(-m_1 z)-C_1\exp(-m_1 z)]\times\\
&\times J_1(mr)dm,\\
&A_x^{(2)} = i\omega\mu_0\varepsilon_{2t}^*\frac{M_x}{4\pi}\int_0^\infty D\exp(-m_{2\lambda}z)J_0(mr)dm,\\
&A_z^{(2)} = i\omega\mu_0\varepsilon_{2t}^*\frac{M_x}{4\pi}\int_0^\infty \left[-D\frac{m_{2\lambda}}{m}\exp(-m_{2\lambda}z)+\right.\\
&\left.+G\exp(-m_{2t}z)\right]J_1(mr)dm
\end{aligned}\right\}, \qquad (17)$$

где B, B_1, C, C_1, D, G, — неизвестные множители. При записи выражений для компонент векторного потенциала в виде (17) выполняются первые четыре условия краевой задачи (16). Из последних двух условий (при $z = -h$ и при $z = H$) не сложно получить систему шести алгебраических уравнений. Решая эту систему, можем определить шесть неизвестных множителей в (17). Приведем формулы для множителей B, B_1, C, C_1, от которых зависит электромагнитное поле в области V_1, для случая, когда $h = 0$:

$$C = \frac{B[m^2 m_{2\lambda} + m_1(k_{2t}^2 + m_{2t}m_{2\lambda})] + (B+2)\times}{m_1 m_{2\lambda}[m_1 + m_{2t} +}$$
$$\frac{\times[m^2 m_{2\lambda} - m_1(k_{2t}^2 + m_{2t}m_{2\lambda})]\exp(-2m_1 H)}{+(m_1 - m_{2t})\exp(-2m_1 H)]},$$

$$B = \frac{2(k_{2t}^2 m_1 - k_1^2 m_{2\lambda})\exp(-2m_1 H)}{k_1^2 m_{2\lambda} + k_{2t}^2 m_1 - (k_{2t}^2 m_1 - k_1^2 m_{2\lambda})\exp(-2m_1 H)},$$
$$B_1 = B + 1, C_1 = C.$$

Пользуясь (2), (17), определим компоненты электромагнитного поля. В частности, при $h = 0$ и $z = 0$ (генераторный магнитный диполь и точка наблюдения расположены на поверхности S_1) для компоненты H_x получим:

$$\begin{aligned}
&H_x^{(1)} = (x,y,0) = \frac{M_x}{2\pi}\int_0^\infty \left\{k_1^2\frac{m}{m_1}(B+1)J_0(mr)+\frac{1}{r^3}\times\right.\\
&\left.\times\left[Cm_1 - \frac{m^2}{m_1}(B+1)\right]\cdot[x^2 mrJ_0(mr)+(y^2-x^2)J_1(mr)]\right\}dm.
\end{aligned} \qquad (18)$$

На основе (4), (18) можно провести математическое моделирование с целью выяснения влияния электрических параметров анизотропных горных пород, а также глинистой корки на результаты измерений в диэлектрическом микрокаротаже.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-05-65271).

ЛИТЕРАТУРА

1. В а н ь я н Л.Л. Основы электромагнитных зондирований. М.: «Недра», 1965. 108 с.
2. В а н ь я н Л.Л. Электромагнитные зондирования. М.: Научный мир, 1997. 218 с.
3. Г у б а т е н к о В.П. Эффект Максвелла—Вагнера в электроразведке // Физика Земли. 1991. № 4. С. 88–98.
4. Д а е в Д.С. Высокочастотные электромагнитные методы исследования скважин. М.: Недра. 1974. 192 с.
5. К а р и н с к и й А.Д., К о з а к Н.М. Результаты теоретических исследований влияния конечного радиуса кривизны скважины на результаты диэлектрического микрокаротажа // Тез. докл. конф. «Новые достижения в науках о Земле». М., 1993. С. 29.
6. К а р и н с к и й А.Д. Физические предпосылки измерения различных компонент поля в электромагнитном каротаже при изучении анизотропии пластов // Геофизика. 2002. № 4. С. 15–23.
7. Т и х о н о в А.Н. О распространении электромагнитного поля в слоистой анизотропной среде // Докл. АН СССР. 1959. Т. 126. № 5. С. 967–970.
8. L i a n g C. Shen. Problems in dielectric-constant logging and possible routes to their solution // The Log Analist. 1985. N6 (November—December). P. 14–25.
9. R a m a R a u, R a y D a v i e s, M i c h a e l F i n k e and M i c h a e l M a n n i n g. Advances in high frequency dielectric logging // SPWLA, 32th Annual Logging Symposium. Paper S. 18 p. 1991. June 16-19. Houston, Texas, USA. 1991. H.18.

Российский государственный
геологоразведочный университет
Рецензент — Б.С. Светов