



# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБРАБОТКИ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ПРОБ

Д. г.-м. н. Ю. А. Ткачев, к. г.-м. н. А. А. Шейн  
tkachev@geo.komisc.ru

Поставим следующую задачу: определить размеры частиц пробы после дробления и степени сокращения ее массы на этапах так, чтобы затраты энергии на дробление материала были минимальными, а погрешность содержания, вызванная многоэтапной обработкой, находилась в заданных пределах [3].

Для решения этой задачи необходимо установить зависимость затрат на дробление от размеров частиц и массы пробы и найти математическое выражение для численного критерия эффективности той или другой схемы обработки. Рассмотрим оценку расхода энергии на дробление. В зависимости от крупности дробленого материала условно разделяют стадии дробления и измельчения: крупное дробление — от 1500 до 100 мм; среднее дробление — от 100 до 40 мм; мелкое дробление — от 40 до 5 мм; измельчение — от 5 до 0,1 мм; тонкое измельчение — от 0,1 до 0,05 мм.

В дальнейшем, независимо от размеров частиц, будет использоваться только один термин — дробление. Важная количественная характеристика — степень дробления  $i$ , которая определяется как отношение максимальных размеров частиц до ( $D$ ) и после ( $d$ ) дробления:  $i = D/d$ .

Степень дробления на каждом этапе обработки назовем частной:

$$i_k = \frac{d_{k-1}}{d_k}, k = 1, 2, \dots, n,$$

степень дробления, достигнутая за все этапы, — общая и равна произведению частных степеней:

$$i_1 i_2 \dots i_n = \frac{d_0}{d_1} \frac{d_1}{d_2} \dots \frac{d_{n-1}}{d_n} = \frac{d_0}{d_n} = i.$$

С уменьшением размеров частиц в них уменьшается число крупных дефектов, облегчающих разрушение, поэтому удельная прочность частиц возрастает. Для горных пород это заметно для частиц размерами меньше 0,1–0,5 мм [1]. Таким образом, существенными факторами, влияющими на затраты энергии на дробление, являются степень дробления и размеры измельчаемых частиц.

Работа на дробление одной частицы размера  $D$  до размера  $d$  определяется с помощью законов дробления [1]. В 1867 г. П. Риттингер, рассматривая дробление одиночного куба на более мелкие, предположил, что работа прямо пропорциональна вновь образованной поверхности и выражается через  $D$  и  $d$  следующим образом [1]:

$$A = K_p \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{D} \right) Q = K_p \left( \frac{i-1}{D} \right) Q,$$

где  $K_p$  — коэффициент пропорциональности;  $Q$  — масса пробы.

Закон дробления Кика — Кирпичева (1875) утверждает, что работа на дробление пропорциональна объему тела. В этом случае зависимость от  $D$  и  $d$  имеет более сложный вид:

$$A = K_k (\lg D - \lg d) Q = K_k Q \lg i.$$

Ф. Бонд в 1951 г. предложил считать затраты энергии на дробление пропорциональными среднему геометрическому из объема и поверхности куба, что соответствует формуле:

$$A = K_6 \left( \frac{1}{\sqrt{d}} - \frac{1}{\sqrt{D}} \right) Q = K_6 \frac{\sqrt{i}-1}{\sqrt{D}} Q.$$

Закон Кика — Кирпичева применяется для оценки затрат энергии на стадиях крупного и среднего дробления. Так как при обработке проб размеры частиц можно отнести к стадиям мелкого дробления, то применение этого закона исключается. Считается, что при мелком дроблении применим закон Риттингера, а закон Бонда занимает промежуточное положение.

Формула для подсчета энергии по закону Риттингера хорошо согласуется с существующими нормами затрат труда

на дробление при обработке проб. Нами были приняты нормы времени на механическое дробление проб, взятые в зависимости от крепости пород и размеров частиц. Эти нормы выработки, являющиеся обобщением большого производственного опыта и специального хронометража, приведены в справочниках укрупненных сметных норм (см. таблицу), где  $N$  обозначены затраты времени в человеко-часах на 1 кг пробы. Считая, что затраты времени прямо пропорциональны затратам энергии, т.е.  $N = K(1/d - 1/D)$ , можно определить коэффициент для различных степеней дробления:

$$K_N = NDd/(D - d).$$

Из данных таблицы видно, что более всего отличается от остальных значений коэффициент  $K$ , отвечающий дроблению от  $D = 5$  мм до  $d = 3$  мм.

При вычислении среднего значения наибольшее и наименьшее значение коэффициента отбрасывались. Величины  $K$  для пород одинаковой крепости незначительно отличаются для различных степеней дробления, а коэффициент  $\bar{K}$  позволяет достаточно точно оценить затраты времени в соответствии с существующими нормами. Например, на дробление 1 кг пород IV — VI категории крепости от размера  $D = 10$  мм до размера  $d = 0,06$  мм по существующим нормам отводится  $N_1 = 0,011 + 0,025 + 0,047 + 0,073 = 0,156$  чел.-ч., а затраты по формуле, связанной с законом Риттингера  $N_2 = (1/d - 1/D) \bar{K}_N = 0,172$ . Если же рассмотреть дробление 1 кг пород X — XI категорий от размера  $D = 25$  мм до размера  $d = 1,1$  мм, то получим со-

Таблица норм времени на механическое дробление при обработке проб

| Категории крепости пород | Размер частиц, мм |               |               |               |               |               |               |               | $\bar{K}$ |
|--------------------------|-------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|-----------|
|                          | 25–11             | 10–6          | 5–3           | 2,5–1,1       | 1,0–0,6       | 0,5–0,3       | 0,25–0,15     | 0,14–0,07     |           |
| I–III                    | 0.005<br>0.10     | 0.008<br>0.12 | 0.018<br>0.13 | 0.034<br>0.07 | 0.061<br>0.09 | 0.1<br>0.08   | 0.196<br>0.07 | 0.5<br>0.07   | 0.09      |
| IV–VI                    | 0.006<br>0.12     | 0.011<br>0.19 | 0.025<br>0.19 | 0.047<br>0.09 | 0.073<br>0.11 | 0.128<br>0.10 | 0.242<br>0.08 | 0.55<br>0.08  | 0.11      |
| VII–IX                   | 0.008<br>0.16     | 0.013<br>0.20 | 0.031<br>0.23 | 0.064<br>0.12 | 0.84<br>0.13  | 0.148<br>0.11 | 0.285<br>0.11 | 0.615<br>0.09 | 0.14      |
| X–XI                     | 0.012<br>0.24     | 0.018<br>0.27 | 0.064<br>0.48 | 0.088<br>0.17 | 0.125<br>0.18 | 0.190<br>0.14 | 0.348<br>0.13 | 0.678<br>0.9  | 0.19      |

Примечание: В числителе — затраты времени на дробление; в знаменателе — трудоемкость (коэффициент  $K$ ).



ответственно  $N_1 = 0,175$  и  $N_2 = 0,165$ .

Поэтому для оценки затрат энергии  $A$  на дробление при многоэтапной обработке проб нами использовался закон Риттингера. Работа на каждом этапе  $A_k$  вычисляется по формуле

$$A_k = K \left( \frac{1}{d_k} - \frac{1}{d_{k-1}} \right) Q_{k-1} = \frac{K}{Q_0} \left( \frac{1}{d_k} - \frac{1}{d_{k-1}} \right) \frac{1}{m_{k-1}},$$

а суммарная затраченная энергия —

$$A = \frac{K}{Q_0} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{d_k} - \frac{1}{d_{k-1}} \right) \frac{1}{m_{k-1}},$$

где  $m_0 = 1$ . Постоянный множитель  $K/Q_0$  не влияет на значения размеров частиц и степеней сокращения, при которых функция затрат достигает наименьшего значения. Поэтому оптимизация обработки проб есть задача минимизации функции:

$$A = \frac{1}{d_1} + \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{d_k} - \frac{1}{d_{k-1}} \right) \frac{1}{m_{k-1}}$$

при ограничениях

$$\sum_{k=1}^n d_k (m_k - m_{k-1}) \leq \frac{\sigma^2 Q_0}{\gamma C}$$

$$d_0 \geq d_1 \geq \dots \geq d_n \geq d,$$

$$f(x^k) \leq f(x^{k-1}), \quad 1 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_{n-1} \leq m,$$

где  $A$  — функция затрат энергии;  $d_k$  — размеры частиц пробы на этапах обработки после дробления, см;  $m_k$  — степени сокращения массы пробы;  $\sigma$  — предельно допустимая погрешность, доли единицы;  $Q_0$  — масса начальной пробы, г;  $\gamma$  — средняя плотность материала, г/см<sup>3</sup>;  $C$  — контрастность руды;  $\delta$  — наименьший технически возможный размер частицы после дробления, определяемый комплектом механизмов, см;  $m$  — степень общего сокращения массы пробы.

Решение поставленной задачи определяет эффективную схему обработки проб, удовлетворяющую и требованиям минимизации затрат, и требованиям необходимой точности.

Оптимизация обработки проб относится к классу задач минимизации функции многих переменных при некоторых ограничениях:  $\min f(x)$  при  $x \in X$ , где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  — точка  $n$ -мерного пространства, а  $X$  — некоторое подмножество этого пространства [2]. Подмножество называется допустимым множеством задачи минимизации, а точки, принадлежащие к  $X$ , — допустимыми точками. В нашем случае размеры ча-

стиц  $d_k$  и степени сокращения массы пробы  $m_k$  определяют точку  $x = (d_1, \dots, d_n, m_1, \dots, m_{n-1})$ , а вышеприведенные неравенства задают допустимое множество.

Точка  $x$  называется решением задачи минимизации, если она является допустимой, и для всех остальных допустимых точек выполняется неравенство:  $f(x) \leq f(x)$ . Решение задачи может быть единственным, их может быть несколько. Множество решений может быть бесконечным.

Справедлива теорема Вейрштрасса, позволяющая выделить широкий класс задач минимизации, имеющих решение: задача минимизации непрерывной функции  $f(x)$  на замкнутом ограниченном множестве  $X$  разрешима. Непрерывная функция может достигать наименьшего значения либо в некоторой внутренней точке допустимого множества, либо на его границе. При решении задач минимизации важную роль играет градиент функции  $f(x)$ , т. е. вектор, координаты которого — частные производные:

$$f'(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Если минимум функции  $f(x)$  достигается во внутренней точке  $\hat{x}$ , то градиент в этой точке обращается в нуль:  $f'(\hat{x}) = 0$ .

Градиент определяет направление наискорейшего возрастания функции. Это свойство используют для построения некоторой последовательности точек из допустимого множества  $x^1, x^2, \dots, x^k, \dots$ , таких, что значение функции убывает от точки к точке, т.е. выполняется неравенство

$$f(x^k) \leq f(x^{k-1}).$$

Методы построения подобных последовательностей называются методами спуска. Такую последовательность можно построить, перемещаясь от точки к точке в направлении, противоположном градиенту, что обеспечивает убывание функции:

$$x^{k+1} = x^k - a_k f'(x^k),$$

где  $a_k$  — некоторое положительное число, называемое шагом спуска.

Иногда, в целях уменьшения объема вычислений на каждом этапе спуска изменяют значения не всех, а одной или нескольких переменных, полагая остальные постоянными и изменяя их на последующих шагах. Такой метод называется методом покоординатного

спуска.

В том случае, если задача минимизации имеет вид  $\min f(x)$ , при ограничении  $g(x) = 0$ , для решения задачи используют метод множителей Лагранжа. При этом составляют функцию Лагранжа  $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$  и находят значения  $x$  и  $\lambda$ , в которых градиент функции Лагранжа обращается в нуль. Для этого необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}, i = 1, 2, \dots, n, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x) = 0. \end{cases}$$

Решениями этой системы могут быть одна или несколько  $n$ -мерных точек. Сравнением значений функции  $f(x)$  в этих точках можно определить наименьшее значение.

Для решения системы уравнений будем использовать метод последовательных приближений. При этом система приводится к виду

$$x_i = \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Выбирается некоторое начальное приближение к решению системы  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , а каждое последующее приближение находится из соотношений:

$$x_i^k = \Phi_i(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}, \dots, x_n^{k-1})$$

При выполнении некоторых условий последовательность  $x^1, x^2, \dots, x^k, \dots$  сводится к решению указанной системы уравнений.

Задача оптимизации обработки проб — частный случай задачи минимизации функции:

$$F(x, y) = \frac{1}{y_1^a} + \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{y_k^a} - \frac{1}{y_{k-1}^a} \right) \frac{1}{x_{k-1}}$$

при ограничениях

$$y_1^\beta (x-1) + \sum_{k=2}^{n-1} y_k^\beta (x_k - x_{k-1}) + y_n^\beta (m - x_{n-1}) \leq D$$

$$b \geq y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n \geq a > 0,$$

$$1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq m,$$

где  $a \geq 1, \beta > 1$ .

Ограничения этой задачи определяют замкнутую ограниченную область, в которой функция  $F(x, y)$  непрерывна, так как  $x_i > 0, y_i > 0$ . Следовательно, по теореме Вейрштрасса задача минимизации имеет решение, поиск которого состоит из нескольких этапов.

Этап 1. Зафиксируем переменные  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  и введем обозначения:

$$a_1 = 1 - \frac{1}{x_1},$$

$$a_k = \frac{1}{x_{k-1}} - \frac{1}{x_k}, \quad k = 2, 3, \dots, n-1,$$

$$a_n = \frac{1}{x_{n-1}},$$

$$b_1 = x_1 - 1,$$

$$b_k = x_k - x_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots, n-1,$$

$$b_n = m - x_{n-1}.$$

Рассмотрим задачу минимизации функции

$$F_1(y) = \sum_{k=1}^n a_k / y_k^a$$

при ограничениях

$$\sum_{k=1}^n b_k y_k^\beta \leq D,$$

$$b \geq y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n \geq a > 0,$$

где  $a_k > 0, b_k > 0$ . Эта задача имеет единственное решение, которое находится методом множителей Лагранжа:

$$\hat{y}_k = \left(\frac{D}{S}\right)^\beta \left(\frac{a_k}{b_k}\right)^{\frac{1}{a+\beta}}, (*)$$

$$\text{где: } S = \sum_{k=1}^n (a_k^\beta b_k^a)^{\frac{1}{a+\beta}}.$$

Этап 2. Подставив значение  $\hat{y}_k$  в функцию  $F_1(y)$ , получим

$$F_1(y) = D^{\frac{1}{\beta}} S^{1-\frac{1}{\beta}}.$$

Таким образом, задача минимизации функции  $F(x, y)$  сводится к минимизации функции

$$S(x) = \frac{x_1 - 1}{x_1^p} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{x_k - x_{k-1}}{(x_{k-1} x_k)^p} + \frac{(m - x_{n-1})^{1-p}}{x_{n-1}^p}$$

при ограничении

$$1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq m,$$

где  $p = \beta/(a + \beta)$ . Решением этой задачи является решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{p}{1-p} \frac{x_2 - x_2^p}{x_2^{p-1}}; \\ x_k = \frac{p}{1-p} \frac{x_{k+1} - x_{k-1}^p - x_{k+1}^p x_{k-1}}{x_{k+1}^p - x_{k-1}^p}, \quad k = 2, \dots, n-1 \\ x_{n-1} = \frac{p}{1-p} \frac{(m - x_{n-1}) x_{n-2}^p - (m - x_{n-1})^p x_{n-2}}{(m - x_{n-1})^p - x_{n-2}^p}, \end{cases}$$

обозначим решение этой системы

$$\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n-1}).$$

Этап 3. Подставляем значения  $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n-1}$  в соотношение (\*), получим оптимальные значения переменных  $\hat{y}_k$

$$\hat{y}_1 = \left(\frac{D}{S(\hat{x})}\right)^\beta \left(\frac{1}{\hat{x}_1}\right)^{\frac{1}{a+\beta}},$$

$$\hat{y}_k = \left(\frac{D}{S(\hat{x})}\right)^\beta \left(\frac{1}{\hat{x}_{k-1} \hat{x}_k}\right)^{\frac{1}{a+\beta}}, \quad k = 2, \dots, n-1;$$

$$\hat{y}_n = \left(\frac{D}{S(\hat{x})}\right)^\beta \left(\frac{1}{(m - \hat{x}_{n-1}) \hat{x}_{n-1}}\right)^{\frac{1}{a+\beta}}.$$

Приведенный метод позволяет решать задачу оптимизации обработки проб для произвольного числа этапов и любой заданной точности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев С. Е., Перов В. А., Зверевич В. В. Дробление, измельчение и грохочение полезных ископаемых. М.: Недра, 1980.
2. Моисеев Н. Н., Иванюков Ю. П., Столярова Е. М. Методы оптимизации. М.: Наука, 1978.
3. Ткачев Ю. А., Юдович Я. Э. Статистическая обработка геохимических данных. Л.: Наука, 1975.



## СТРУКТУРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АПАТИТА ТВЕРДЫХ ТКАНЕЙ ЗУБОВ ЧЕЛОВЕКА ПРИ ОБРАБОТКЕ БИОГЕННЫМИ КИСЛОТАМИ

К. г.-м. н. В. И. Каткова, ведущий электронщик В. Н. Филиппов  
katkova@geo.komisc.ru

В медицинской литературе имеются сведения об экспериментальных исследованиях диффузии органических и неорганических веществ через эмаль и дентин зубов [2]. В последние десятилетия минералогия посвятила немало публикаций, в которых освещены вопросы, касающиеся состава и структуры твердых тканей зубов человека. Основное внимание они уделяют структурным исследованиям, особенностям изоморфизма [3, 5, 6, 7]. Отличия в параметрах решетки, связанные с различным содержанием кальция, углерода, фтора и молекулярной воды в структуре биоапатита, исследователи ассоциируют с возрастом человека и патологическими процессами в организме.

Исходя из анализа литературы, можно сказать, что недостаточно изучены процессами переотложения и перекристаллизации апатита эмали, дентина, а также не ясны механизмы вхождения катионов и анионов в кристаллографические позиции апатита в витальных (живых) зубах.

Структурными методами (прибором ДРОН, Spexord M-75), с помощью растрового электронного микроскопа JSM-6400 (JEOL) и микрозондового анализа изучены апатиты твердых тканей зубов до и после воздействия на них биогенных щавелевой и угольной кислот. В качестве материала для исследований использовались интактные зубы, удаленные в связи с патологией пародонта, а также молочные зубы.

Образование щавелевой кислоты в процессе жизнедеятельности грибов возможно из самых разнообразных веществ: углеводов, белков, глицерина. Экспериментальная система для производства щавелевой кислоты состояла из геля с фрагментами дентина постоянных зубов, на поверхности которой помещали грибковую культуру, поддерживаемую глюкозой (рис. 1). Начальные значения pH в гелевой системе равнялись 7. Продолжительность опытов составляла около 20 дней. Были проанализированы 14 гелевых систем с *Aspergillus niger*.

Аналогичные опыты с твердыми